I - Diedro

Definição

Ângulo *diedro* ou *diedro* ou *ângulo diédrico* é a reunião de dois semiplanos de mesma origem, não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a *aresta* do diedro e os dois semiplanos são suas *faces*.

Podemos estender a definição acima para termos o diedro nulo, quando suas faces são coincidentes e raso se suas faces são semiplanos opostos.

Características

O interior de um diedro é convexo.

Os pontos do interior de um diedro são pontos internos ao diedro.

A reunião de um diedro com se interior é um setor diedral ou diedro completo, também conhecido por diedro convexo.

O exterior de um diedro é côncavo.

Os pontos do exterior de um diedro são os pontos externos ao diedro.

A reunião de um diedro com seu exterior é também conhecida por diedro côncavo.

Secções

Secção de um diedro é a intersecção do diedro com um plano secante à aresta.

Propriedades

Duas secções paralelas de um diedro são congruentes.

As secções são dois ângulos de lados com sentidos respectivamente concordantes e, portanto, elas são congruentes.

Secção Reta ou Normal

É a secção cujo plano é perpendicular à aresta do diedro.

Propriedades

Secções normais de um mesmo diedro são congruentes.

De fato as secções normais de um mesmo diedro são paralelas e, portanto, congruentes.

Natureza

Reto	Um diedro é reto se, e somente se, sua secção normal forma um ângulo reto.
Agudo	Um diedro é agudo se, e somente se, sua secção normal forma um ângulo agudo.

Obtuso	Um diedro é obtuso se, e somente se, sua secção normal forma um ângulo obtuso.
Adjacentes	Dois diedros são adjacentes se, e somente se, suas secções normais forem ângulos adjacentes.
Opostos Pela Aresta	Dois diedros são opostos pela aresta se, e somente se, as secções normais forem ângulos opostos pelo vértice.

II - Triedro

Definição

Dadas três semi-retas V_a, V_b, V_c, de mesma origem V, não coplanares, consideremos os semi-espaços ε_1, ε_2, ε_3, como segue:

ε_1, com origem no plano (bc) e contendo V_a;

ε_2, com origem no plano (ac) e contendo V_b;

ε_3, com origem no plano (ab) e contendo V_c.

Triedro determinado por V_a, V_b, V_c é a intersecção dos semi espaços ε_1, ε_2 e ε_3.

Sob uma outra orientação, a figura geométrica definida acima é chamada setor triedral ou ângulo sólido de três arestas. Seguindo essa orientação, o triedro é a reunião dos três setores angulares definidos por V_a, V_b e V_c.

Elementos

V é o vértice.

V_a, V_b, V_c são as arestas.

$a\hat{V}b$, $a\hat{V}c$ e $b\hat{V}c$ ou $\hat{ab}$, $\hat{ac}$ e $\hat{bc}$ são as faces ou ângulos de face.

di(a), di(b), di(c) são os diedros do triedro. Cada um deles é determinado por duas faces do triedro.

O triângulo ABC com um único vértice em cada aresta é uma secção do triedro.

Um triedro notável é aquele cujas faces são ângulos retos e cujos diedros são diedros retos. Esse triedro é chamado triedro tro-retângulo (ou triedro tri-retangular).

Natureza

Polar — Um triedro é polar de outro se, e somente se, tem o mesmo vértice do outro, se suas arestas são respectivamente perpendiculares aos planos das faces do outro e se formam ângulos agudos com as arestas correspondentes do outro.

III - Poliedro Convexo

Definição

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. As que não tem contorno são chamadas fechadas.

Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

Chamamos de Poliedro Convexo o polígono plano convexo (ou região poligonal convexa) com um número finito n ($n \geq 4$) tal que dois polígonos não estão num mesmo plano, cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos e o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semi-espaços é o poliedro convexo.

Elementos

Uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

Faces	São os polígonos;
Arestas	São os lados dos polígonos;
Vértices	São os vértices dos polígonos;
Ângulos	São os ângulos dos polígonos.

Um poliedro convexo tem:

Faces	São os polígonos convexos;
Arestas	São os lados dos polígonos;
Vértices	São os vértices dos polígonos.

Natureza

Poliedro Euleriano — Os poliedros para os quais vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces do poliedro), são chamados poliedros eulerianos.

Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Poliedro de Platão — Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, todas as suas faces têm o mesmo número (n) de arestas, se todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas e se vale a relação de Euler.

Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão. São eles: *Tetraedro*, *Hexaedro*, *Octaedro*, *Dodecaedro* e *Icosaedro*.

Para facilitar a compreensão, relaciono abaixo os valores de m, n, A, V e F dos poliedros de Platão:

m	n	A	V	F	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Poliedros Regulares — Um poliedro é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes e quando seus ângulos poliédricos são congruentes. Existem cinco, e apenas cinco, tipos de poliedros regulares. São eles: *Tetraedro Regular*, *Hexaedro Regular*, *Octaedro Regular*, *Dodecaedro Regular* e *Icosaedro Regular*.

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular.

IV - Prisma

Definição

Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo) A_1 A_2 ... A_n de n lados e uma reta r não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se prisma ilimitado convexo ou prisma convexo indefinido à reunião das retas paralelas a r que passam pelos pontos da região poligonal dada. Se a região poligonal (polígono) A_1 A_2 ... A_n for côncava, o prisma ilimitado resultará côncavo.

Ao considerarmos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABCD...MN situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

A definição de prisma (prisma convexo limitado ou prisma convexo defindo ou prisma convexo) pode ser escrita como uma reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções.

Elementos

Um prisma ilimitado convexo possui: n arestas, n diedros e n faces (que são faixas de plano).

Um prisma convexo possui:

Bases	Duas bases congruentes (as secções citadas acima);
Faces Laterais	n faces laterais (paralelogramos);
Faces	(n + 2) faces;
Arestas Laterais	n arestas laterais;
Arestas	3n arestas;
Diedros	3n diedros;
Vértices	2n vértices;
Triedros	2n triedros.

A altura de um prisma é a distância h entre os planos das bases. É interessante notar que, para o prisma, é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$

Secção

Secção de um prisma é a intersecção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Secção Reta ou Secção Normal é a secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

Natureza

Prisma Reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares oas planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos. Prisma Oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases. Prisma Regular é um prisma cujas bases são polígonos regulares.

Um prisma será tringulas, quadrangular, pentagonal, etc., conforma a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Paralelepípedos e Romboedros

Paralelepípedo	É um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.
Paralelepípedo Reto	É um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).
Paralelepípedo Reto-Retângulo ou Paralelepípedo Retângulo ou Ortoedro	É um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.
Cubo	É um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.
Romboedro	É um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos.
Romboedro Reto	É um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).
Romboedro Reto-Retângulo ou Cubo	É um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.

V - Pirâmide

Definição

Consideremos uma região poligonal plano-convexa (polígono plano-convexo) A_1 A_2 ... A_n de n ladose um ponto V fora de seu plano. Chama-se pirâmide convexa indefinida (ou ângulo poliédrico ou ângulo sólido) à reunião das semi-retas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada. Se a região poligonal (polígono) A_1 A_2 ... A_n for côncava, a pirâmide ilimitada resulta côncava.

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC...MN situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

V é o vértice e o polígono ABC...MN, a base da pirâmide.

Podemos, também, definir pirâmide como segue: Pirâmide Convexa Limitada ou Pirâmide Convexa é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com essa secção.

Elementos

Uma pirâmide ilimitada convexa possui:

Arestas	n arestas
Diedros	n diedros
Faces	n faces (são os ângulos ou setores angulares planos).

Uma pirâmide convexa possui:

Bases	Uma base (a secção acima citada)
Faces Laterais	n faces laterais (Triângulos)
Faces	(n + 1) faces
Arestas Laterais	n arestas laterais
Arestas	2n arestas
Diedros	2n diedros
Vértices	(n + 1) vértices
Ângulos Poliédricos	(n + 1) ângulos poliédricos
Triedros	n triedros

A altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base.

Para uma pirâmide, a relação de Euler também é válida.

Secções

É uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

Natureza

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Chama-se apótema de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral. Tetraedro é uma pirâmide triangular. Tetraedro regular é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes entre si.

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

VI - Cilindro

Definição

Superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas são superfícies geradas por uma reta g (geratriz) que se mantém paralela a uma reta dada r (direção) e percorre os pontos de uma linha dada d (diretriz). São superfícies regradas por serem geradas por retas e desenvolvidas por poderem ser aplicadas, estendidas ou desenvolvidas num plano (planificadas) sem dobras ou rupturas. Superfície cilíndrica de rotação ou revolução é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta g (geratriz) em torno de uma reta e (eixo), fixa, sendo a reta g paralela e distinta da reta e. Considera-se que cada ponto da geratriz descreve uma circunferência com centro no eixo e cujo plano é perpendicular ao eixo. A superfície cilíndrica de revolução de eixo e, geratriz g e raio r é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada (r) de uma reta dada (e). Chamamos de cilindro circular ilimitado ou cilindro circular indefinido à reunião das retas paralelas a s e que passam pelos pontos do círculo.

Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se Cilindro circular ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α. Também podemos definir cilindro como a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções..

Elementos

Um cilindro possui:

Bases	Duas bases em forma de círculos, congruentes e situados em planos paralelos (as secções citadas acima)
Geratrizes	São os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r.
Raios	r é o raio da base

Superfícies

Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_l. Superfície Total é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A área dessa superfície é a área total e indicada por A_t.

Natureza

Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, temos o cilindro circular oblíquo. Se são perpendiculares aos planos das bases, temos o cilindro circular reto. O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém seus lados. O cilindro equilátero é um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado, onde g = h = 2r.

Secção meridiana é a intersecção do cilindro com um plano que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases. A secção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo e a de um cilindro reto é um retângulo.

VII - Cone

Definição

Superfícies regradas desenvolvíveis cônicas são superfícies geradas por uma reta g (geratriz), passando por um ponto dado V (vértice) e que percorre os pontos de uma linha dada d (diretriz), com V fora de d. Superfície cônica de rotação ou revolução é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta g (geratriz) em torno de uma reta e (eixo), fixa, sendo a reta g oblíqua ao eixo e. O vértice (V) é a intersecção das retas g e e. Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r e um ponto V fora de seu plano. Chama-se cone circular ilimitado ou cone circular indefinido à reunião das semi-retas de origem em V e que passam pelos pontos do círculo.

Agora, consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e outra nos pontos do círculo. A definição de cone também pode ser expressa como uma parte do cone ilimitado que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma secção circular, reunida com esta secção.

Elementos

O cone possui:

Bases	Uma base - círculo de centro O e raio r ou a secção citada acima
Geratrizes	São os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência base
Vértices	O ponto V citado acima
Raio	r é o raio da base
Altura	*Distância entre o vértice e o plano da base*
Eixo	é a reta determinada pelo vértice e pelo contro da base
Apótema	é a geratriz de um cone circular reto

Superfícies

Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_l. Superfície total é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área total dessa superfície é chamada área total e indicada por A_t.

Natureza

A natureza dos cones é definida pela posição da reta VO em relação ao plano da base. Se esta reta é oblíqua ao plano da base, temos um cone circular oblíquo. Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos o cone circular reto. Este cone também é chamado de cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos. Cone equilátero é um cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero $g = 2r,\ h = r\sqrt{3}$.

A Secção meridiana de um cone é a intersecção do cone com um plano que contém a reta VO. A Secção meridiana de um cone de revolução é um triângulo isósceles.

VIII - Esfera

Definição

Consideremos o ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r.

Esfera também é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Elementos

Pólos relativos a uma secção da esfera são as extremidades do diâmetro perpendicular ao plano desta secção.

Considerando a superfície de uma esfera de eixo e, temos:

Pólos	São as intersecções da superfície com o eixo
Equador	É a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície
Paralelo	É uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É "paralela" ao equador
Meridiano	É uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo
Distância Polar	É a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao pólo
Fuso Esférico	É a intersecção da superfície de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica
Cunha Esférica	É a intersecção de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

Natureza

Por natureza, a esfera sempre será um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro, como já foi dito anteriormente.

Secção

Toda secção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como secção um círculo máximo da esfera. Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da secção, temos a relação: $s^2 = r^2 - d^2$. Rearranjando esta equação, é fácil chegar na bem conhecida $r^2 = d^2 + s^2$, que é o famoso e muito utilizado Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo retângulo OMA, onde O é o centro da esfera, M é a projeção perpendicular do centro O no plano secante e A é o ponto de intersecção do plano com a superfície da esfera.

Superfície

Chama-se de superfície de uma esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r.

A superfície de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.