

GEOMETRIA PLANA

Introdução

A Geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema. Alguns desses objetos são aceitos sem demonstração, isto é, você deve aceitar tais conceitos porque os mesmos parecem funcionar na prática!

A Geometria permite que façamos uso dos conceitos elementares para construir outros objetos mais complexos como: pontos especiais, retas especiais, planos dos mais variados tipos, ângulos, médias, centros de gravidade de objetos, etc.

Algumas definições

Polígono: É uma figura plana formada por três ou mais segmentos chamados lados de modo que cada lado tem interseção com somente outros dois lados próximos, sendo que tais interseções são denominadas vértices do polígono e os lados próximos não são paralelos. A região interior ao polígono é muitas vezes tratada como se fosse o próprio polígono

Polígono convexo: É um polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original. Se dois pontos pertencem a um polígono convexo, então todo o segmento tendo estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono. Um polígono é dito não convexo se dados dois pontos do polígono, o segmento que tem estes pontos como extremidades, contiver pontos que estão fora do polígono.

Polígono	No. de lados	Polígono	No. de lados
Triângulo	3	Quadrilátero	4
Pentágono	5	Hexágono	6
Heptágono	7	Octógono	8
Eneágono	9	Decágono	10
Undecágono	11	Dodecágono	12

Polígono não convexo: Um polígono é dito não convexo se dados dois pontos do polígono, o segmento que tem estes pontos como extremidades, contiver pontos que estão fora do polígono.

Segmentos congruentes: Dois segmentos ou ângulos são congruentes quando têm as mesmas medidas.

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet

Acesse Agora! www.vestibular1.com.br

Paralelogramo: É um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Pode-se mostrar que num paralelogramo:

Os lados opostos são congruentes;
Os ângulos opostos são congruentes;
A soma de dois ângulos consecutivos vale 180° ;
As diagonais cortam-se ao meio.

Losango: Paralelogramo que tem todos os quatro lados congruentes. As diagonais de um losango formam um ângulo de 90° .

Retângulo: É um paralelogramo com quatro ângulos retos e dois pares de lados paralelos.

Quadrado: É um paralelogramo que é ao mesmo tempo um losango e um retângulo. O quadrado possui quatro lados com a mesma medida e também quatro ângulos retos.

Trapézio: Quadrilátero que só possui dois lados opostos paralelos com comprimentos distintos, denominados base menor e base maior. Pode-se mostrar que o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e o seu comprimento é a média aritmética das somas das medidas das bases maior e menor do trapézio.

Trapézio isósceles: Trapézio cujos lados não paralelos são congruentes. Neste caso, existem dois ângulos congruentes e dois lados congruentes. Este quadrilátero é obtido pela retirada de um triângulo isósceles menor superior (amarelo) do triângulo isósceles maior.

Pipa ou papagaio: É um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos congruentes, mas os seus lados opostos não são congruentes. Neste caso, pode-se mostrar que as diagonais são perpendiculares e que os ângulos opostos ligados pela diagonal menor são congruentes.

CONHEÇA A GEOMETRIA PLANA

Para se chegar à compreensão da necessidade de classificação de figuras, da forma como é usual na Geometria Euclidiana, é necessário obter compreendido as suas vantagens matemáticas. Sem esta compreensão, parece um jogo de palavras ter ouvido o professor afirmar que um triângulo isósceles é o que tem os lados iguais, e depois ver o professor permitir que um triângulo com os três lados iguais seja também isósceles. Só após o conhecimento de algumas propriedades das figuras é que os alunos compreenderão as vantagens de optar por uma classificação.

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br

Vamos optar por apresentar os diversos tipos de figuras em separado apenas por uma razão de "arrumação".

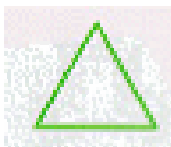
Chamamos polígonos a qualquer porção do plano limitada por segmentos de reta que forma uma linha poligonal fechada.

TRIÂNGULOS

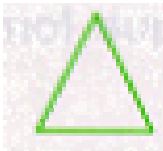
Os triângulos são polígonos de três lados. Iremos classificar os triângulos de duas maneiras: quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Quanto aos lados:

Equilátero
todos os lados iguais



Isósceles
dois lados iguais

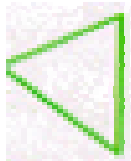


Escaleno
todos os lados diferentes



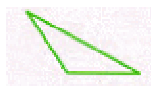
Quanto aos ângulos:

Acutângulo



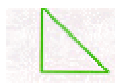
Um ângulo agudo

Obtusângulo



Um ângulo obtuso

Retângulo



Um ângulo reto

Algumas propriedades:

- Se o triângulo tem dois lados iguais, os ângulos que lhes são opostos também são iguais.
- Num triângulo, ou em triângulos iguais, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.
- Num triângulo, ou em triângulos iguais, a ângulos iguais opõem-se lados iguais.
- Num triângulo, ao maior lado opõem-se o maior ângulo.

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br

Quadriláteros

- Os quadriláteros podem ser trapézios (com dois lados paralelos) e não trapézios (quando não tem lados paralelos).

- Os trapézios podem ser paralelogramos (com lados opostos paralelos) e trapézios propriamente ditos (apenas com dois lados paralelos).

Paralelogramos

Retângulo



Losango



Quadrado



Paralelogramo



Propriedades:

Retângulo: - lados opostos iguais

- quatro ângulos retos
- diagonais iguais que se bissetam
- dois eixos de simetria

Losango: - quatro lados iguais

- ângulos opostos iguais
- diagonais perpendiculares que se bissetam
- dois eixos de simetria

Quadrado: - quatro lados iguais

- quatro ângulos retos
- diagonais perpendiculares
- quatro eixos de simetria

Paralelogramo oblíquângulo: - lados opostos iguais

- ângulos opostos iguais
- diagonais que se bissetam
- não tem eixos de simetria

Trapézios propriamente ditos

Isósceles

Retangular

Escaleno

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br



Propriedades:

Isósceles: - dois lados iguais

- um eixo de simetria

Retângular: - um ângulo reto

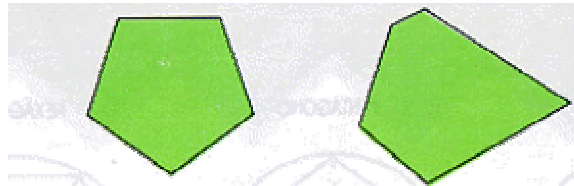
- não tem eixos de simetria

Escaleno: - quatro lados diferentes

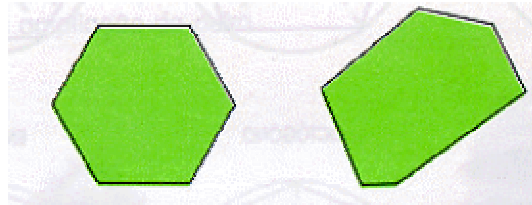
- não tem eixos de simetria

Polígonos

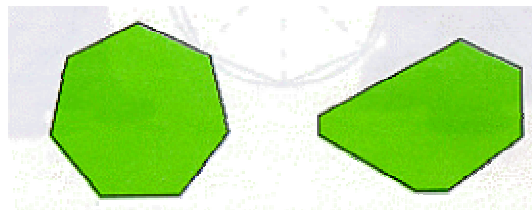
Pentágonos - São polígonos com cinco lados e cinco ângulos. Por exemplo:



Hexágonos - São polígonos de seis lados e seis ângulos. Por exemplo:

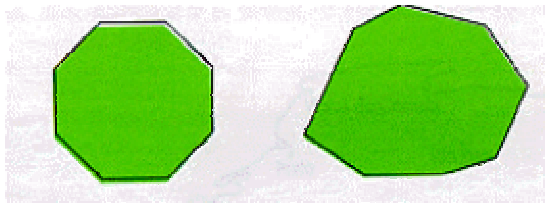


Heptágonos - São polígonos de sete lados e sete ângulos. Por exemplo:



Octógonos - São polígonos de oito lados e oito ângulos. Por exemplo:

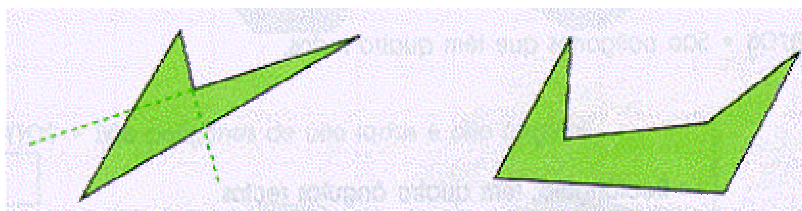
Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br



Os polígonos podem ser côncavos ou convexos.

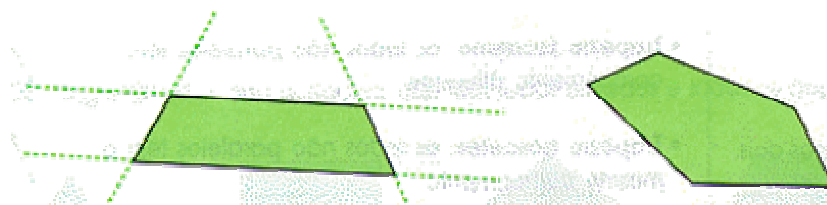
Um polígono diz-se côncavo quando o prolongamento de pelo menos um dos seus lados corta o polígono em duas partes.

Exemplo:



Um polígono diz-se convexo quando o prolongamento de qualquer dos segmentos que o determina deixa o polígono de um só lado.

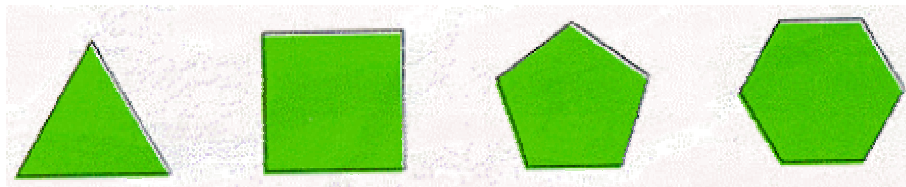
Exemplo:



Os polígonos podem ser regulares ou não regulares.

Um polígono é regular se tem todos os lados e todos os ângulos iguais, caso contrário, diz-se não regular.

Exemplo de polígonos regulares:

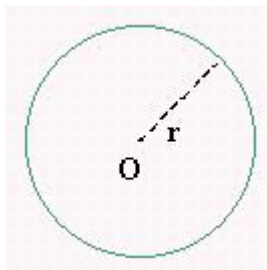


Circunferência (Círculo)

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br

Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo. Esse ponto fixo é denominado de CENTRO da circunferência (ponto O). A distância constante denominamos de RAIOS (indicado por r).

Por exemplo:



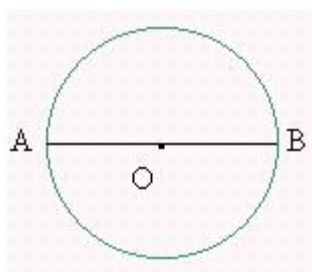
Vejam os alguns elementos da circunferência:

* Qualquer segmento que une o Centro a qualquer ponto da circunferência chama-se raio (r).

* Qualquer segmento que une dois pontos quaisquer e distintos de uma circunferência chama-se CORDA.



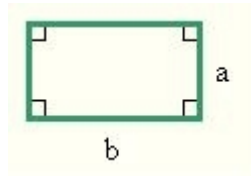
* A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se DIÂMETRO. Assim, o diâmetro é a maior corda da circunferência e seu comprimento é igual ao dobro do comprimento do raio. Vamos indicar o diâmetro por d, logo $d=2r$.



ÁREA DO RETÂNGULO

Em um retângulo de lados a e b, figura abaixo, onde:

Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br



* a = medida do comprimento ou base

* b = medida da largura ou altura

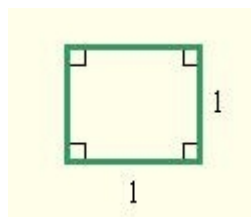
* s = área total

temos que:

$$\text{área do retângulo} = b \cdot h$$

ÁREA DO QUADRADO

Considerando que o quadrado é um caso particular do retângulo, onde todos os lados são iguais, figura abaixo:



* l = medida do comprimento ou base

* l = medida da largura ou altura

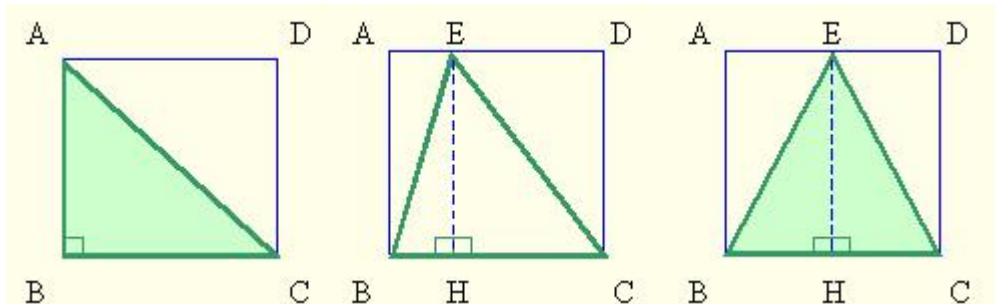
* s = área total

temos que:

$$\text{área do quadrado} = l \cdot l$$

**ÁREA DE UMA REGIÃO TRIANGULAR
(OU ÁREA DE UM TRIÂNGULO)**

Considere as seguintes figuras:



Observe que, em qualquer uma das três figuras, a área do triângulo destacada é igual à metade da área do retângulo ABCD.

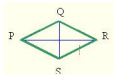
Assim, de modo geral, temos:

$$\text{área do triângulo} = (b \cdot h) / 2$$

Neste caso, podemos considerar qualquer lado do triângulo como base. A altura a ser considerada é a relativa a esse lado.

ÁREA DE UM LOSANGO

O quadrilátero abaixo é um losango onde vamos considerar:



* O segmento PR representa a Diagonal Maior, cuja medida vamos indicar por D.

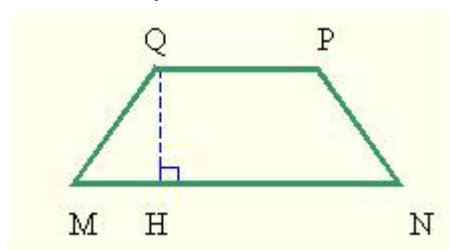
* O segmento QS representa a Diagonal Menor, cuja medida vamos indicar por d.

Você nota que a área do losango PQRS é igual à metade da área do losango cujas dimensões são as medidas D e d das diagonais do losango, então:

$$\text{área do losango} = (D \cdot d) / 2$$

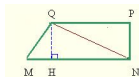
ÁREA DE UM TRAPÉZIO

Considerando o Trapézio abaixo, podemos destacar:



- * MN é a base maior, cuja medida vamos representar por B.
- * PQ é a base menor, cuja medida vamos representar por b.
- * A distância entre as bases é a altura do trapézio, cuja medida indicaremos por h.

Se traçarmos a diagonal QN, por exemplo, obteremos dois triângulos, QPN e QMN, que têm a mesma altura de medida h.



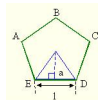
Da figura temos:

- área do trapézio MNPQ = área do triângulo QPN + área do triângulo QMN
- área do trapézio = $(B \cdot h)/2 + (b \cdot h)/2$
- área do trapézio = $(B \cdot h + b \cdot h)/2$

$$\text{área do trapézio} = (B + b) \cdot h/2$$

ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR

Considerando o polígono regular da figura abaixo, que é um pentágono.



A partir do centro vamos decompor esse pentágono em triângulos que são isósceles e congruentes, em cada um desses triângulos temos.

* base do triângulo, que corresponde ao lado do polígono e cuja a medida vamos indicar por l .

* altura relativa à base do triângulo, que corresponde ao apótema do polígono e cuja medida vamos indicar por a .

A área de cada triângulo é dada por $(l.a)/2$.

Como são cinco triângulos, a área do polígono seria dada por:

$$5.(l.a)/2$$

Logo, a área de um polígono regular, é dada por $n.(l.a)/2$, onde $n = n^\circ$ de lados do polígono.

$$\text{área de um polígono regular} = n.(l.a)/2$$

Sabendo, que $5.l$ representa o perímetro ($2p$) do pentágono regular considerado, a expressão $5.l/2$ representa a metade do perímetro ou o semiperímetro (p) do pentágono.

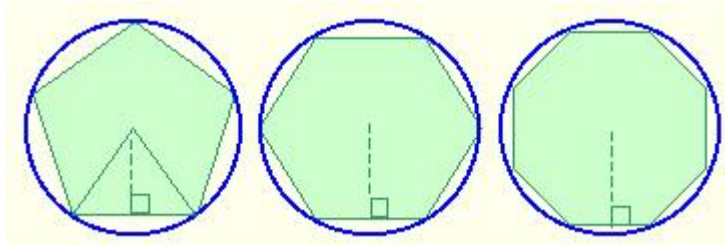
Assim temos: área do pentágono = $5.l/2$

Generalizando para todos os polígonos regulares, podemos escrever:

$$\text{área de um polígono regular} = p.a$$

ÁREA DE UM CÍRCULO

Observe a seqüência de polígonos regulares inscritos numa Circunferência.



Repare que a medida que o número de lados aumenta, o polígono regular tende a se confundir com a região limitada pela CIRCUNFERÊNCIA, ou seja, o CÍRCULO.

Assim:

* o perímetro do polígono regular tende a se confundir com o comprimento da CIRCUNFERÊNCIA $(C=2\cdot\pi\cdot r)$.

* o semiperímetro do polígono tende ao valor $2\cdot\pi\cdot r/2 = \pi\cdot r$.

* o apótema do polígono tende a coincidir com a altura o raio do círculo, então:

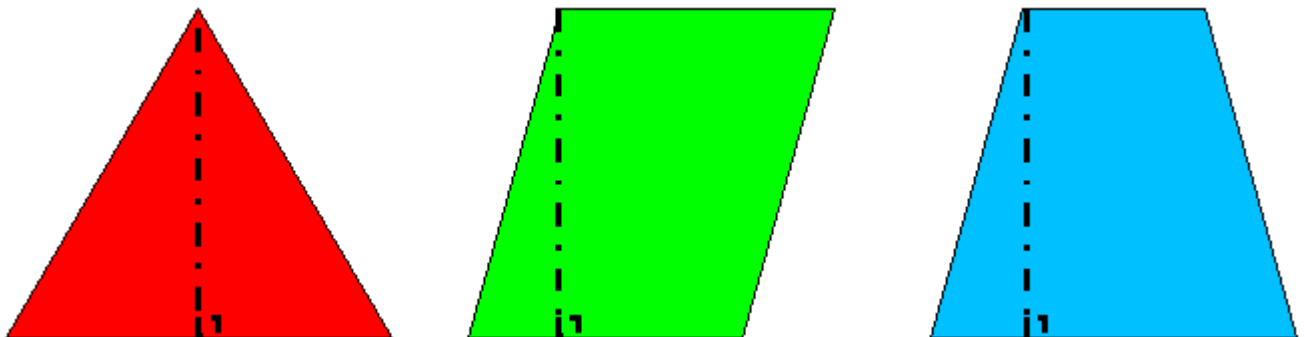
$$\text{área de um círculo} = \pi\cdot r\cdot r$$

GLOSSÁRIO

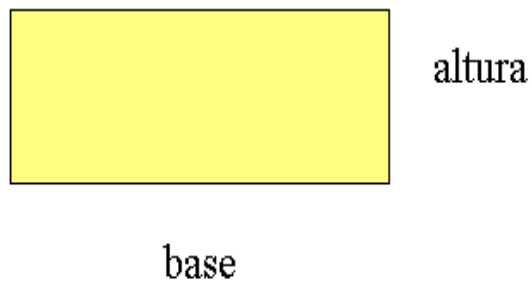
Altura: nome dado a alguns comprimentos.



Em alguns triângulos, paralelogramos ou trapézios, altura é um segmento de reta desenhado a partir de um vértice, perpendicularmente ao lado oposto a ele. Esse lado oposto chama-se base.



Base: no retângulo base é o lado que não é considerado altura.



Vestibular1 – A melhor ajuda ao vestibulando na Internet
Acesse Agora! www.vestibular1.com.br

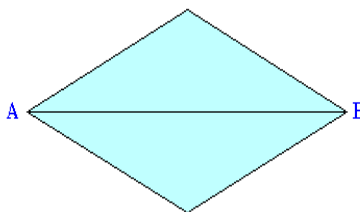
Num triângulo ou paralelogramo base é o lado perpendicular à altura.

Centro: ponto no interior de uma circunferência ou esfera, eqüidistante de todos os pontos dela.

Círculo: porção de um plano limitada por uma circunferência.

Circunferência: curva plana, fechada, cujos pontos estão todos a mesma distância de um ponto interior, dito Centro.

Diagonal: segmento de reta que liga dois vértices de um polígono, os vértices não podem ser vizinhos.



O segmento AB é uma diagonal do losango.

Equilátero: o prefixo "equi" indica igualdade, um polígono é equilátero se todos os lados forem iguais.

Geométria: palavra de origem Grega formada por Geo (terra) e metria (medida). Há 5000 anos, era a ciência de medir terrenos, seus perímetros e suas áreas. Com o tempo, tornou-se a parte da matemática que estuda figuras como retângulos, cubos, esferas, etc.

Perímetro: medida do contorno de uma figura geométrica plana (ou seja, soma de todos os lados).

Raio: segmento de reta que vai do centro a um ponto qualquer da circunferência.

Vértice: ponto comum a dois lados de um ângulo, a dois lados de um polígono ou a três ou mais arestas de uma figura espacial.