EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

A função contínua y = f (x) está definida no intervalo [- 4 , 8] por

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & se & -4 \leq x \leq 0 \\ ax + b & se & 0 < x < 4 \\ 2x - 10 & se & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & se & -4 \leq x \leq 0 \\ ax + b & se & 0 < x < 4 \\ 2x - 10 & se & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

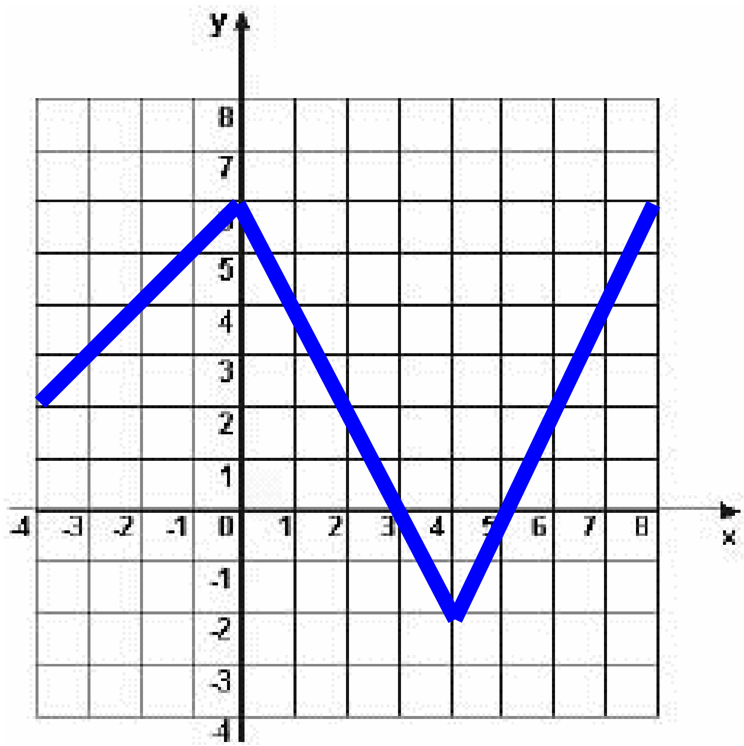
sendo *a* e *b* números reais.
CALCULE os valores de *a* e *b* e **ESBOCE** o gráfico da função dada no plano cartesiano representado na figura abaixo

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \boxed{6 = b}$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow 4a + b = -2 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 6, & se \ -4 \leq x \leq 0 \\ -2x + 6, & se \ 0 < x < 4 \\ 2x - 10, & se \ 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$



QUESTÃO 02

Os números reais **3**, ***a*** e ***b*** são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais ***a***, ***b*** e **8** são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica.

DETERMINE ***a*** e ***b***.

SOLUÇÃO:

I) $b - a = a - 3$, $(a > 3)$

$\Rightarrow b = 2a - 3$

II) $\frac{8}{b} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 8^a$

De I e II temos:

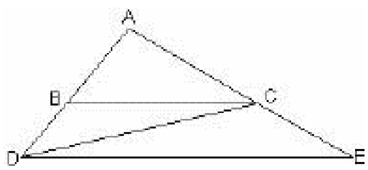
$$(2a - 3)^2 = 8a \;\Rightarrow\; 4a^2 - 12a + 9 = 8a \Rightarrow\; 4a^2 - 20a + 9 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{9}{2}}$$

De I : $b = 2a - 3 = 9 - 3 \;\Rightarrow\; \boxed{b = 6}$

QUESTÃO 03

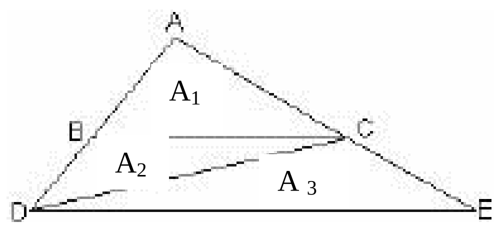
Observe a figura.



Nessa figura, os segmentos BC e DE são paralelos.
Sendo A_1 e A_2 as áreas dos triângulos ABC e BCD, respectivamente, sabe-se que-se que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}$

Considerando A_3 a área do triângulo DCE, **CALCULE** o valor de $\frac{A_3}{A_2}$

SOLUÇÃO:



$\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{5}{3}A_2}$ (1)

Suponhamos $\frac{A_3}{A_2} = K \Rightarrow \boxed{A_3 = K.A_2}$ (2)

ΔCDE e ΔBCD têm mesma altura, distância entre DE e BC, logo $\frac{A_3}{A_2} = \frac{DE}{BC} = K$

ΔADE ~ ΔABC, logo, $\frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_1} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = K^2 \Rightarrow \boxed{1 + \frac{3}{5} + \frac{A_3}{A_1} = K^2}$ (3)

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$1 + \frac{3}{5} + \frac{KA_2}{\frac{5}{3}A_2} = K^2$$

$$\frac{8}{5} + \frac{3K}{5} = K^2 \Rightarrow 5K^2 - 3K - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{K = \frac{A_3}{A_2} = \frac{8}{5}}$$

QUESTÃO 04

Por três pontos não-colineares do plano complexo, **z** $_1$, **z** $_2$ e **z** $_3$, passa uma única circunferência.
Sabe-se que um ponto **z** está sobre essa circunferência se, e somente se,
for um número real.

$$\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_3\right)\left(z_1 - z_3\right)\left(\bar{z}_1 - \bar{z}\right)\left(z_2 - z\right)$$

Seja **C** a única circunferência que passa pelos pontos
z $_1$ = 1, **z** $_2$ = -3i e **z** $_3$ = -7 + 4i do plano complexo.
Assim sendo, **DETERMINE** todos os pontos do plano complexo cuja parte real é igual a -1 e que estão sobre a circunferência **C**.

SOLUÇÃO

$$Z_1 = 1 \quad \Rightarrow \overline{Z_1} = 1$$

$$Z_2 = -3i \quad \Rightarrow \overline{Z_2} = 3i$$

$$Z_3 = -7 + 4i \quad \Rightarrow \overline{Z_3} = -7 - 4i$$

$$Seja \;\; Z = -1 + Ki \quad \Rightarrow \overline{Z} = -1 - Ki$$

$$(\;\overline{Z_2} - \overline{Z_3}\;) = 3i + 7 + 4i = 7 + 7i = 7(1 + i)$$

$$(\;Z_1 - Z_3\;) = 1 + 7 - 4i = 8 - 4i = 4(2 - i)$$

$$(\;\overline{Z_1} - \overline{Z}\;) = 1 + 1 + Ki = 2 + ki$$

$$(\;Z_2 - Z\;) = -3i + 1 - ki = 1 - (3 + k)i$$

$$Substituindo \;\; na \;\; condição \;\; dada \;\; temos:$$

$$7(1 + i)4(2 - i)(2 + ki)\left[1 - (3 + k)i\right] \;\; é \;\; um \;\; número \;\; real$$

$$Efetuando \;\; as \;\; operações \;\; indicadas:$$

$$28\left[\;3k^2 + 10k + 12 + (k^2 - 16)i\;\right] \;\; é \;\; real \quad \Rightarrow k^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ ou \\ k = -4 \end{cases} \quad Assim \;\; os \;\; pontos \;\; do \;\; plano \;\; complexo \;\; são$$

$$\boxed{Z = -1+4i \quad \text{ou} \quad Z = -1-4i}$$

QUESTÃO 05

Um fabricante gastava R$ 40,00 na produção de cada unidade de uma mercadoria, que ele vendia por R$ 100,00. Sobre o preço de venda, o fabricante pagava 40% de imposto. Devido a problemas com os preços das matérias-primas, o custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então, para evitar uma queda acentuada na produção, o Governo resolveu diminuir a alíquota do imposto para 30% do preço de venda, e o fabricante concordou em diminuir o seu percentual de lucro, de 50% para 40%.

CALCULE o novo preço de venda dessa mercadoria.

SOLUÇÃO:

Em cada unidade temos que $\begin{cases} Custo = R\$\ 40{,}00 \\ Venda = R\$\ 100{,}00 \\ \text{Im}\,posto = R\$\ 40{,}00 \end{cases}$

Com os problemas de matéria prima temos que $\begin{cases} Venda = x \\ Custo = 40.1{,}6 = 64 \\ \text{Im}\,posto = 0{,}30x \\ Lucro = 0{,}4.64 = 25{,}60 \end{cases}$

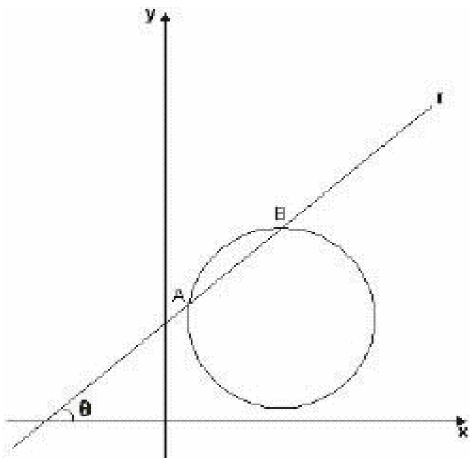
Mas: Venda = Custo + imposto + lucro

$$x = 64 + 0{,}3x + 25{,}60 \Rightarrow x = 128$$

$$\boxed{\text{O novo preço de venda é R\$ 128,00}}$$

QUESTÃO 06

Observe a figura.



Nessa figura, a reta **r** determina uma corda AB, de comprimento $4\sqrt{6}$, na circunferência de equação $x^2 - 18x + y^2 - 16y + 96 = 0$. Além disso, a reta **r** faz com o eixo x um ângulo θ tal que tg θ = $\frac{3}{4}$ e intercepta o eixo y em um ponto de ordenada positiva.

DETERMINE a equação da reta **r**.

SOLUÇÃO:

A equação da reta r é : $y = \frac{3}{4}x + k \ \ (k > 0) \Rightarrow 3x - 4y + 4k = 0$

O centro da circunferência é C(9 , 8) e o raio R = AC = 7.

Seja CM a distância de C a r.

AM = $\frac{AB}{2}$

$\Rightarrow$ AM = $2\sqrt{6}$

Pelo Teorema de Pitágoras temos que : $(CM)^2 = (AC)^2 - (AM)^2$

$\Rightarrow$ CM = 5

A distância de C a r é : $CM = \frac{|3.9 - 4.8 + 4K|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$

$$|4K - 5| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 4K - 5 = 25 \Rightarrow K = \frac{15}{2} \\ ou \\ 4K - 5 = -25 \Rightarrow K = -5 \end{cases}$$

Como k> 0 temos então que k = $\frac{15}{2}$

$$\boxed{\text{A equação de r é } 3x - 4y + 30 = 0}$$

QUESTÃO 07

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + 4y + 3z = a \\ 3x + 7y + 9z = 25 \\ 4x + 6y + 5z = 36 \end{cases}$$

DETERMINE o valor de *a* para que o sistema tenha solução.
Usando esse valor de *a*, **RESOLVA** o sistema.

SOLUÇÃO:

Escalonando a matriz do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & a \\ 3 & 7 & 9 & 25 \\ 4 & 6 & 5 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 16-a \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ 2L_1-L_2 \\ 3L_1-L_3 \\ 4L_1-L_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 16-a \\ 0 & 0 & 4 & 33-2a \\ 0 & 0 & 0 & 20-a \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ 2L_2-L_3 \\ L_2-L_4 \end{array} \end{array}$$

O sistema é possível se e somente se 20 - a = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{a = 20}$

Eliminando-se a última equação, temos o sistema:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z = 8 \\ -2y - z = -4 \\ 4z = -7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{aligned} z &= -\frac{7}{4} \\ y &= \frac{23}{8} \\ x &= \frac{55}{8} \end{aligned} \right.}$$

QUESTÃO 08

Um reservatório é abastecido por duas torneiras, **A** e **B**. A torneira **A**, sozinha, enche o reservatório em 20 horas. A torneira **B**, sozinha, enche o mesmo reservatório em 18 horas.

Às duas horas da manhã, estando esse reservatório vazio, as duas torneiras são abertas. Depois de 4 horas e 30 minutos, a torneira **B** é fechada e a torneira **A** continua a abastecer o reservatório.

DETERMINE a hora exata em que esse reservatório estará cheio.

SOLUÇÃO:

Seja x a capacidade do reservatório. Em 4,5 horas, as duas torneiras despejam no reservatório, $\frac{4,5}{20}x + \frac{4,5}{18}x = \frac{19}{40}x$

Faltam, para encher o reservatório , $\frac{21}{40}x$.

Para a torneira A, temos a seguinte regra de três:

x______________20 hs

$\frac{21}{40}x$ ______________ t $\Rightarrow$ t = 10, 5 hs

O tempo gasto foi de 4,5hs + 10,5 hs = 15 hs

O reservatório estará totalmente cheio às 17 horas.

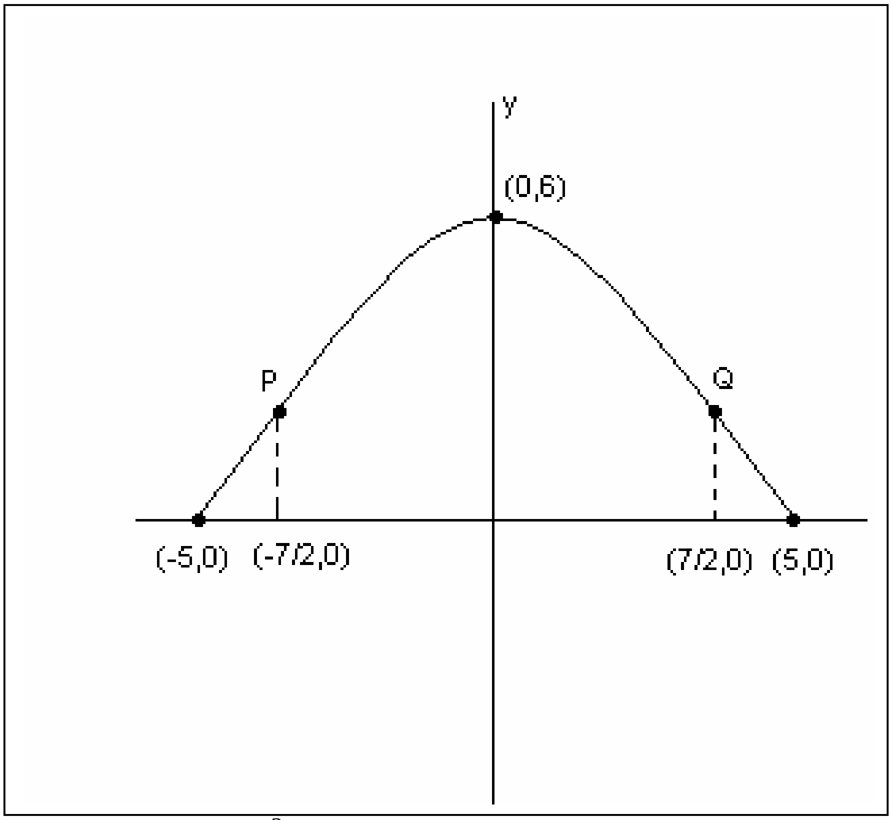
QUESTÃO 09

A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, são reservados 1,5 m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos.

As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos.
CALCULE a altura **máxima** que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

SOLUÇÃO:

Associemos a curvatura do túnel a uma parábola no plano cartesiano com vértice no eixo y. Temos a figura abaixo com os valores em metros.



A função é do tipo $y = ax^2 + 6$, com $a < 0$.
Como 5 é raiz, temos que :

$0 = 25a + 6 \Rightarrow a = -\frac{6}{25}$

A função é, portanto, $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6$

Para $x = 3,5$ ou $x = -3,5$ temos y igual a: $y = -2,94 + 6 = 3,06$

$\Rightarrow y = 3,06$m.

Como deve haver uma folga de 0,3 m, a altura máxima pedida do veículo será 2, 76m.

$\boxed{2,76\text{m}}$