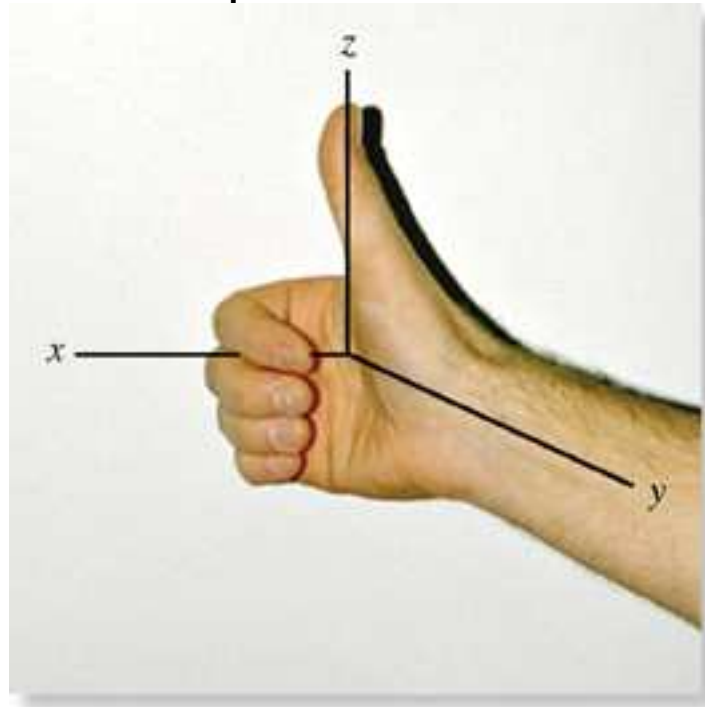


Vetores Cartesianos

# Física Aplicada

# Vetores Cartesianos

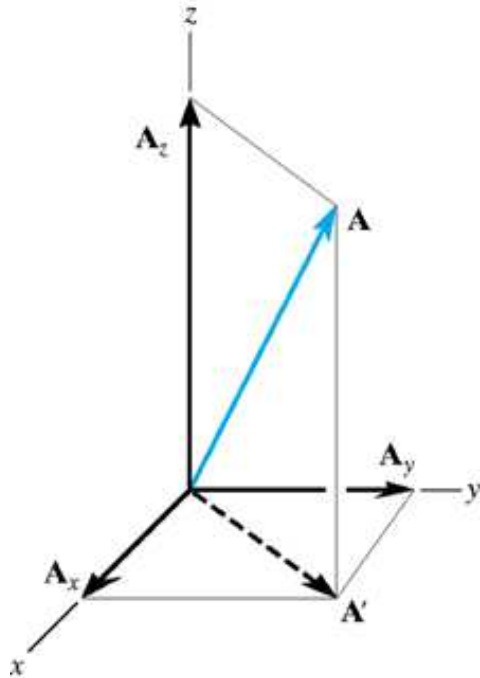
- **Sistemas de Coordenadas Utilizando a Regra da Mão Direita.**
  - Esse sistema será usado para desenvolver a teoria da álgebra vetorial.



*Sistema de coordenadas da mão direita*

# Vetores Cartesianos

- Componentes Retangulares de um Vetor
  - Um vetor  $\underline{A}$  pode ter um, dois ou três componentes ao longo dos eixos de coordenadas  $x, y, z$  dependendo de como está orientado em relação aos eixos.



$$A = A' + A_z$$

$$A' = A_x + A_y$$

*assim* :

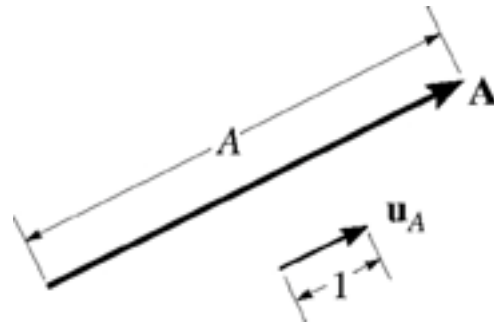
$$A = A_x + A_y + A_z \quad (\text{I})$$

# Vetores Cartesianos

- Vetores Unitários

- A direção de  $\underline{A}$  é especificada usando-se o vetor unitário. Se  $\underline{A}$  é um vetor com intensidade  $A \neq 0$ , então o vetor unitário que tem a mesma direção de  $\underline{A}$  é representado por:

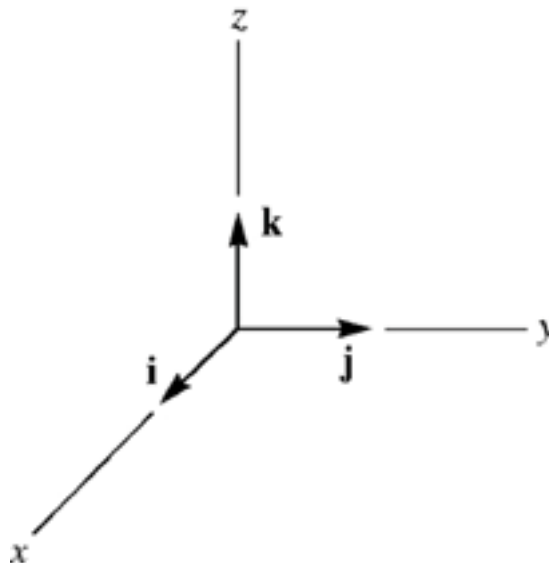
$$u_A = \frac{\underline{A}}{A} \quad (\text{II})$$



# Vetores Cartesianos

- Vetores Cartesianos Unitários

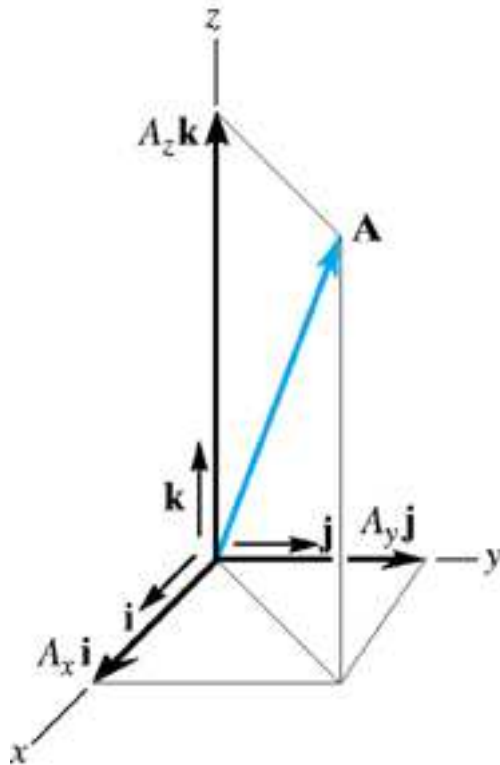
- Em três dimensões, o conjunto de vetores unitários,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  é usado para designar as direções dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Esses vetores serão descritos analiticamente por um sinal positivo ou negativo dependendo da orientação do vetor. Os vetores cartesianos unitários positivos estão representados abaixo.



# Vetores Cartesianos

- Representação de um Vetor Cartesiano

- Como as três componentes de  $\underline{A}$ , figura abaixo, atuam nas direções positivas  $i, j, k$  pode-se escrever  $\underline{A}$  sob a forma de vetor cartesiano como:

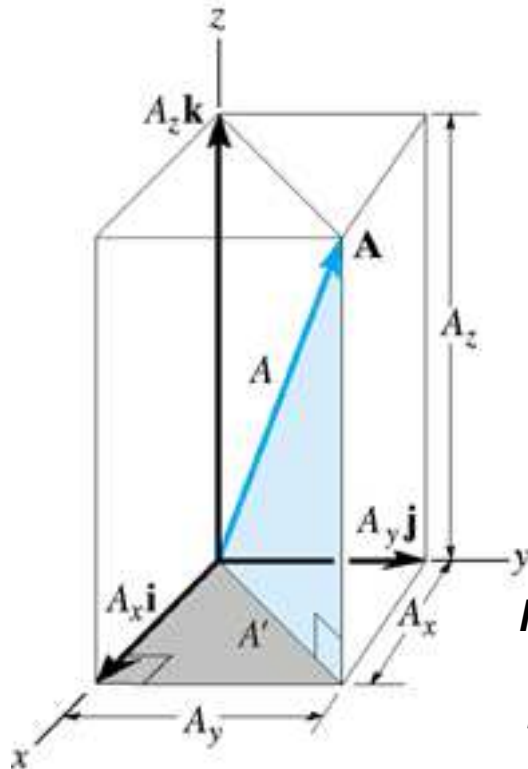


$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (\text{III})$$

Dessa forma cada componente do vetor estão separadas e, como resultado, simplifica as operações de álgebra vetorial, particularmente em três dimensões.

# Vetores Cartesianos

- Intensidade de um Vetor Cartesiano
  - É sempre possível obter a intensidade de  $\underline{A}$ , desde que ele esteja expresso sob a forma vetorial cartesiana. Pela figura abaixo temos:



$$A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$$

$$A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

assim :

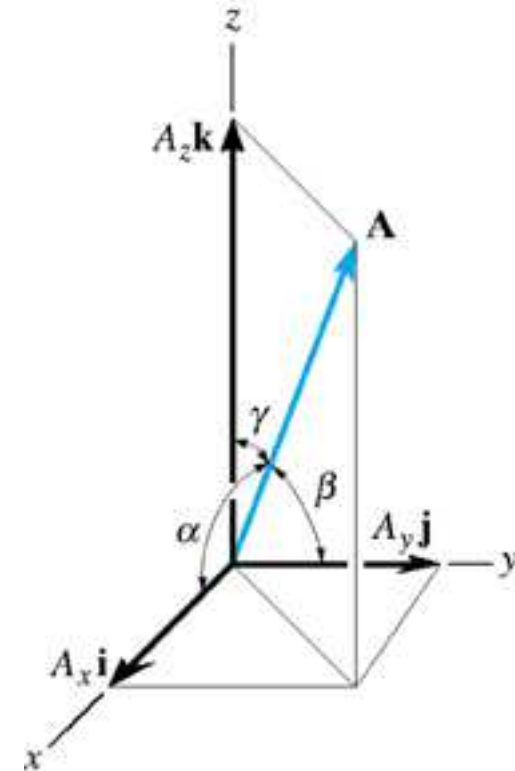
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{(IV)}$$

*Portanto, a intensidade de  $\underline{A}$  é igual a raiz quadrada positiva da soma dos quadrados de seus componentes.*

# Vetores Cartesianos

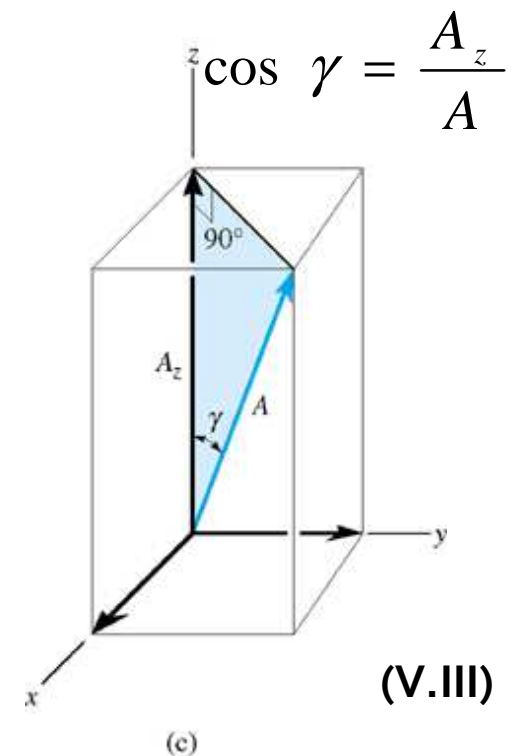
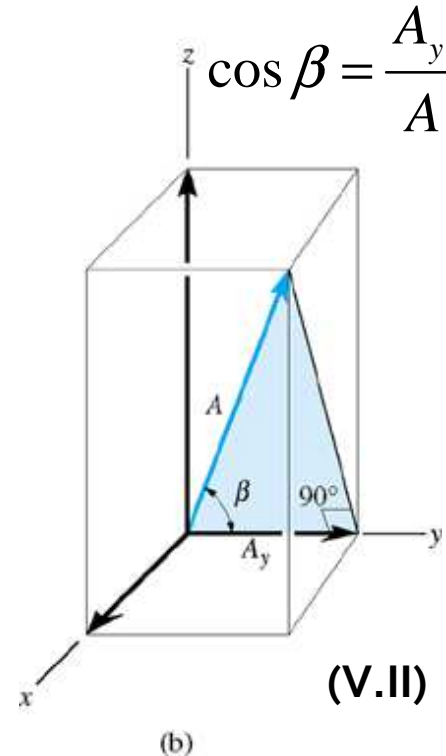
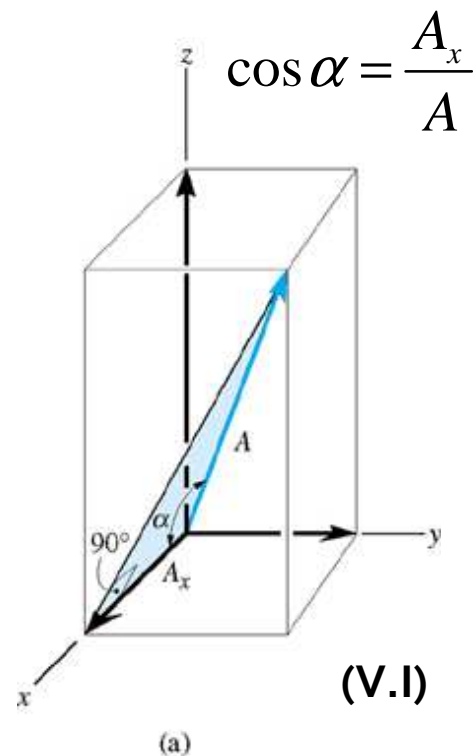
- Direção de um Vetor cartesiano

- A direção de  $\underline{A}$  é definida pelos ângulos diretores coordenados  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta) e  $\gamma$  (gama), medidos entre a origem de  $\underline{A}$  e os eixos positivos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  localizados na origem de  $\underline{A}$ .
- Observe que cada um desses ângulos está entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , Independentemente da orientação de  $\underline{A}$ .



# Vetores Cartesianos

- Para determinarmos  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta) e  $\gamma$  (gama), vamos considerar a projeção de  $A$  sobre os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Com referência aos triângulos retângulos sombreados mostrados em cada uma das figuras temos:



# Vetores Cartesianos

- Uma maneira fácil de se obter os cossenos diretores de  $\underline{A}$  é criar um vetor unitário na direção de  $\underline{A}$ , equação (II). Desde que  $\underline{A}$  seja expresso sob a forma de vetor cartesiano, equação III:

$$uA = \frac{A}{A} \quad (\text{II})$$

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (\text{III})$$

$$uA = \frac{A}{A} = \frac{A_x}{A} i + \frac{A_y}{A} j + \frac{A_z}{A} k \quad (\text{VI})$$

- Onde:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{IV})$$

# Vetores Cartesianos

- Por comparação com as equações (V), vemos que os componentes de  $\underline{uA}$  ( $i, j, k$ ), representam os cossenos diretores de  $\underline{A}$ , isto é:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}; \cos \beta = \frac{A_y}{A}; \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad (\text{V})$$

$$\underline{uA} = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k \quad (\text{VII})$$

- Como a Intensidade de  $\underline{A}$  é igual a raiz quadrada positiva da soma dos quadrados da intensidade dos componentes e  $\underline{uA}$  tem intensidade 1, então:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (\text{VIII})$$

# Vetores Cartesianos

- Finalmente, se a intensidade e os ângulos da coordenada de direção de  $A$  são dados,  $A$  pode ser expresso sob forma vetorial cartesiana como:

$$A = uA$$

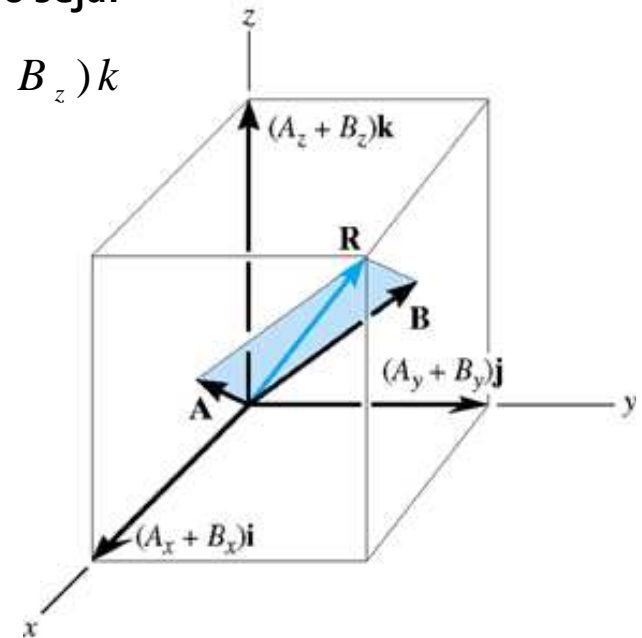
$$A = A \cos \alpha i + A \cos \beta j + A \cos \gamma k \quad (\text{IX})$$

# Vetores Cartesianos

## ■ Adição e Subtração de Vetores Cartesianos

- Essas operações são simplificadas se os vetores são expressos em função de seus componentes cartesianos. Por exemplo, se:
  - $A = A_x i + A_y j + A_z k$  e  $B = B_x i + B_y j + B_z k$ , então o vetor resultante  $R$  tem componentes que representam as somas escalares de  $i, j, k$  de  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ . Ou seja:
  - $R = A \pm B = (A_x \pm B_x) i + (A_y \pm B_y) j + (A_z \pm B_z) k$
  - Generalizando;

$$F_R = \Sigma F = \Sigma F_X i + F_Y j + F_Z k \quad (\times)$$



# Vetores Cartesianos

## ■ Exercícios:

- Expresse a força  $F$ , mostrada na Figura abaixo, como um vetor cartesiano.

- Solução:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$

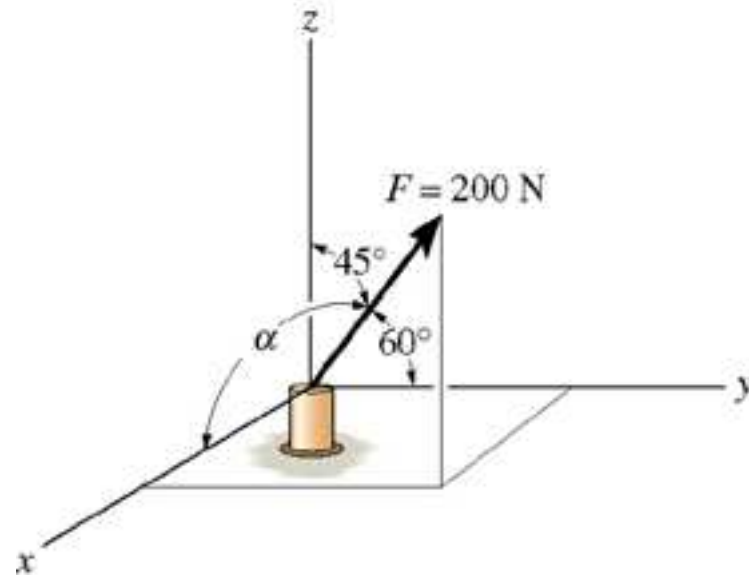
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (0,5)^2 - (0,707)^2}$$

$$\cos \alpha = \pm 0,5$$

- Dessa forma  $\alpha$  pode ser:

$$\alpha = \arccos(0,5) = 60^\circ$$

$$\alpha = \arccos(-0,5) = 120^\circ$$



# Vetores Cartesianos

- Para expressar a força  $F = 200 \text{ N}$ , como vetor cartesiano usa-se a equação (IX):

$$A = uA$$

$$A = A \cos \alpha i + A \cos \beta j + A \cos \gamma k$$

$$F = F \cos \alpha i + F \cos \beta j + F \cos \gamma k$$

$$F = (200 \cdot \cos 60^\circ) i + (200 \cdot \cos 60^\circ) j + (200 \cdot \cos 45^\circ) k$$

$$F = \{100 i + 100 j + 141,4 k\} N$$

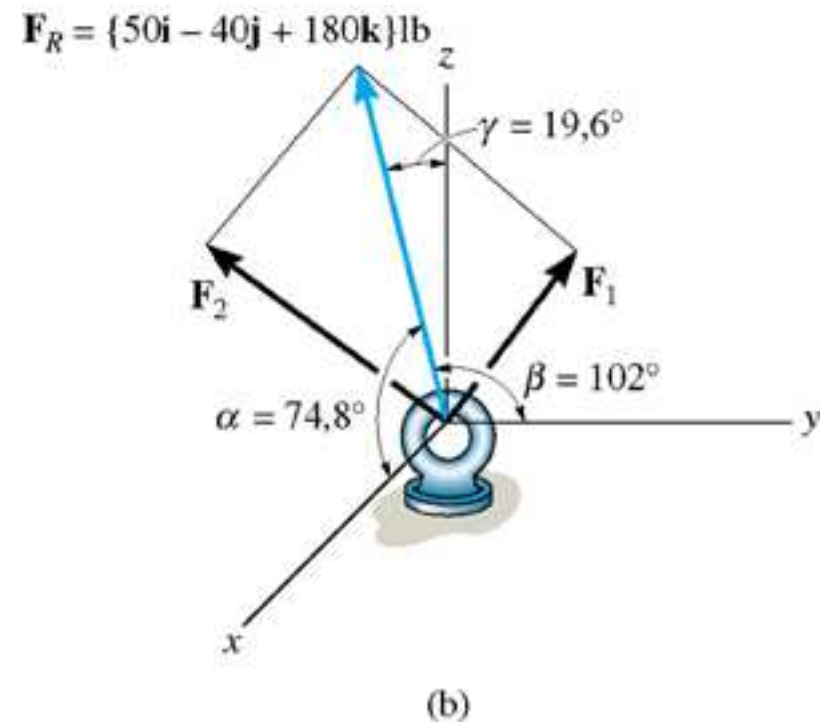
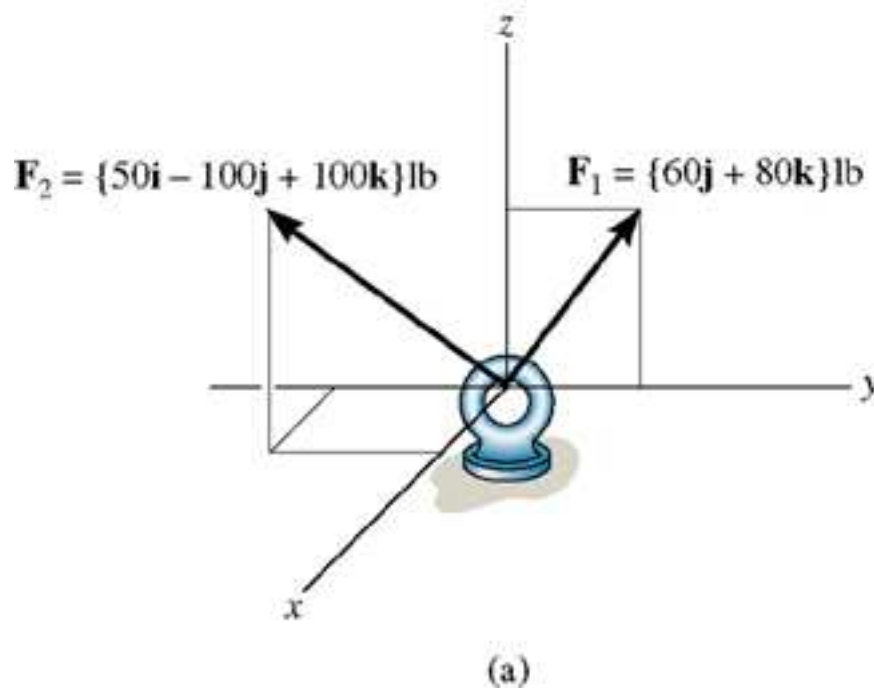
- Aplicando a equação (IV):  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$$F = \sqrt{(100^2) + (100^2) + (141,4)^2}$$

$$F = 200 N$$

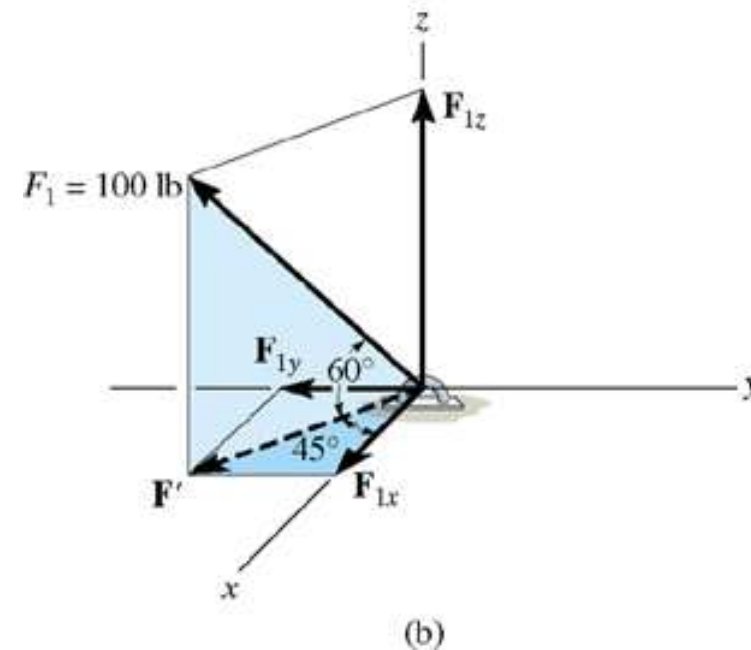
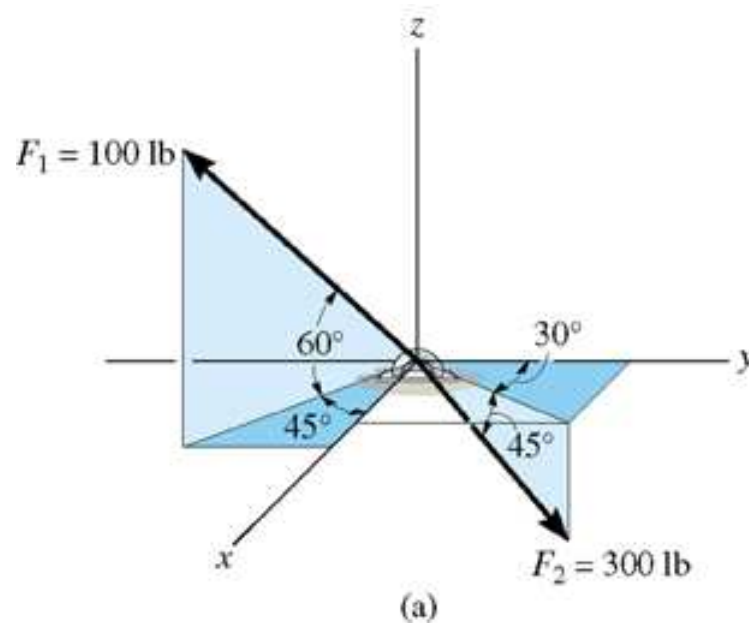
# Vetores Cartesianos

- Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o anel, conforme a figura abaixo.

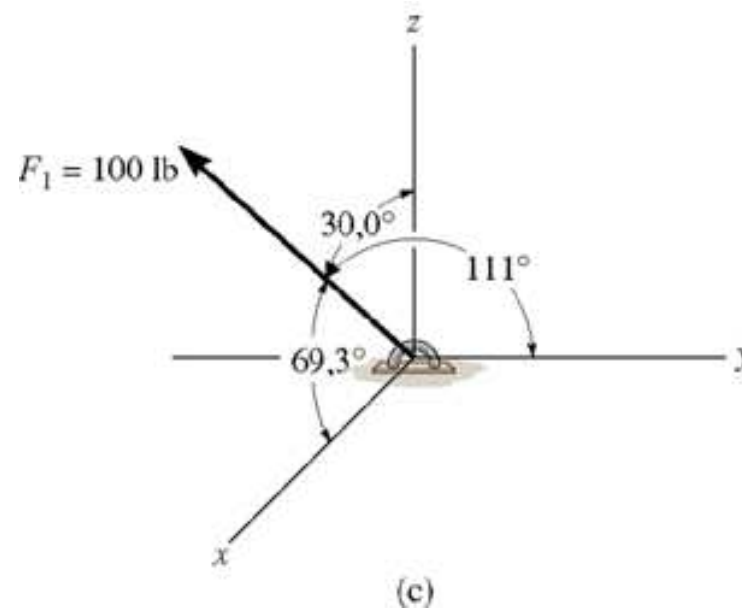


# Vetores Cartesianos

- Expresse a força  $F_1$ , mostrada na figura abaixo, como vetor cartesiano.

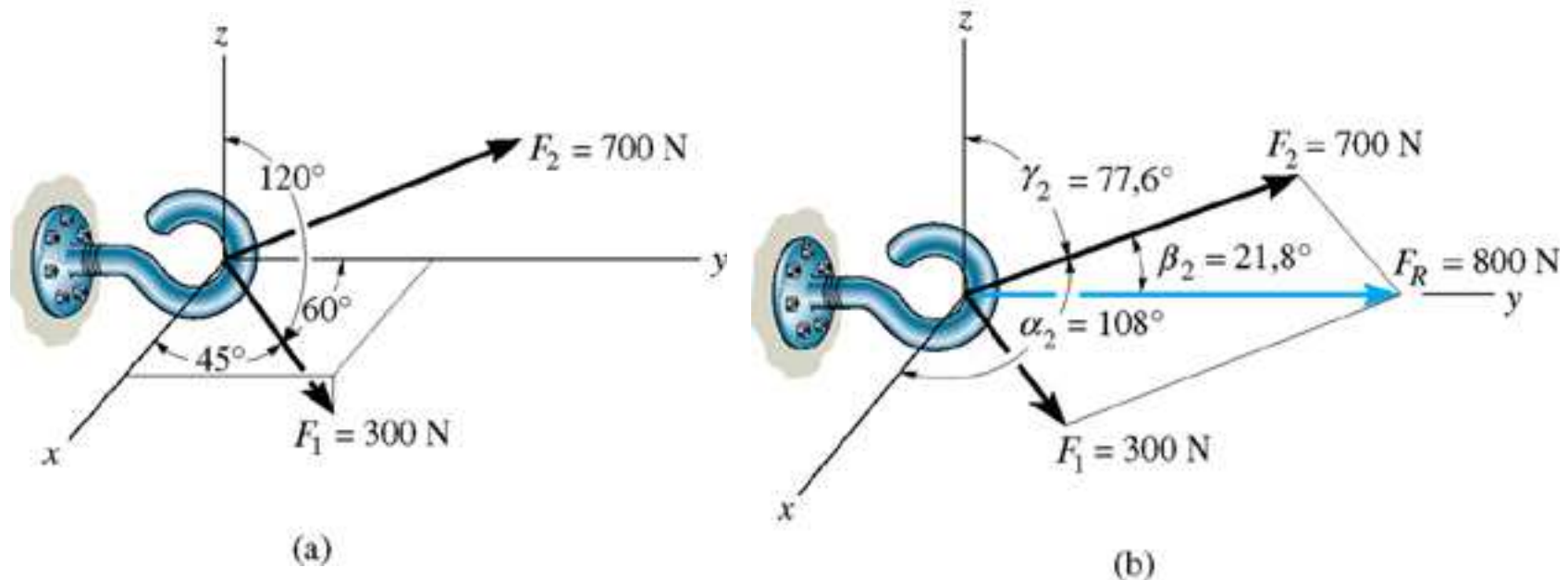


# Vetores Cartesianos



# Vetores Cartesianos

- Duas forças atuam sobre o gancho mostrado abaixo. Especifique os ângulos diretores coordenados de  $F_2$ , de modo que a força resultante  $F_R$  atue ao longo do eixo positivo  $y$  e tenha intensidade de 800 N.



# Vetores Cartesianos

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}; \cos \beta = \frac{A_y}{A}; \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

$$u_A = \frac{A}{A} = \frac{A_x}{A} i + \frac{A_y}{A} j + \frac{A_z}{A} k$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$A = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$

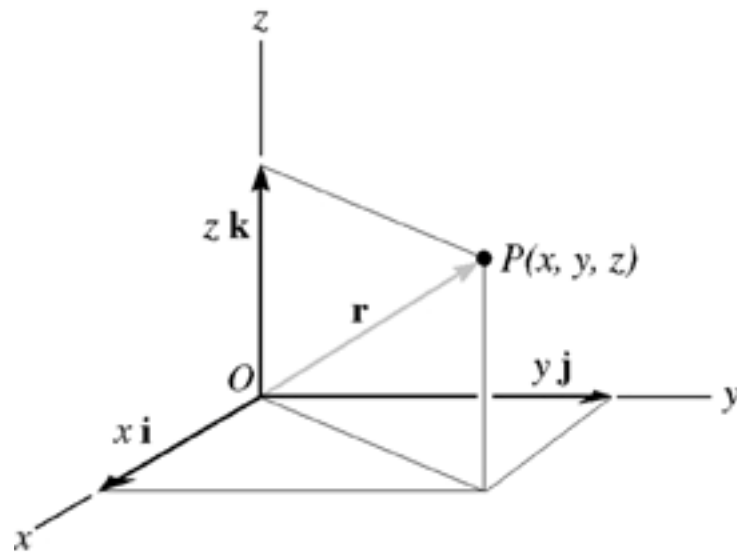
$$F_R = \Sigma F = \Sigma F_x i + F_y j + F_z k$$

# Vetor Posição

# Vetor Posição

- O vetor posição  $\underline{r}$  é definido como um vetor fixo que localiza um ponto no espaço em relação a outro ponto. Por exemplo, se  $r$  estende-se da origem de coordenadas,  $O$ , para o ponto  $P(x, y, z)$ , figura abaixo, então  $\underline{r}$  pode ser expresso na forma de vetor cartesiano como:

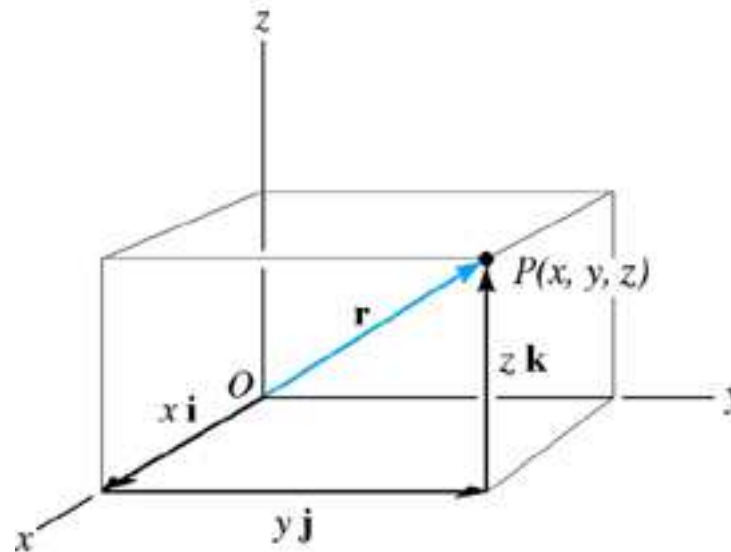
- $\underline{r} = xi + yj + zk$



(a)

# Vetor Posição

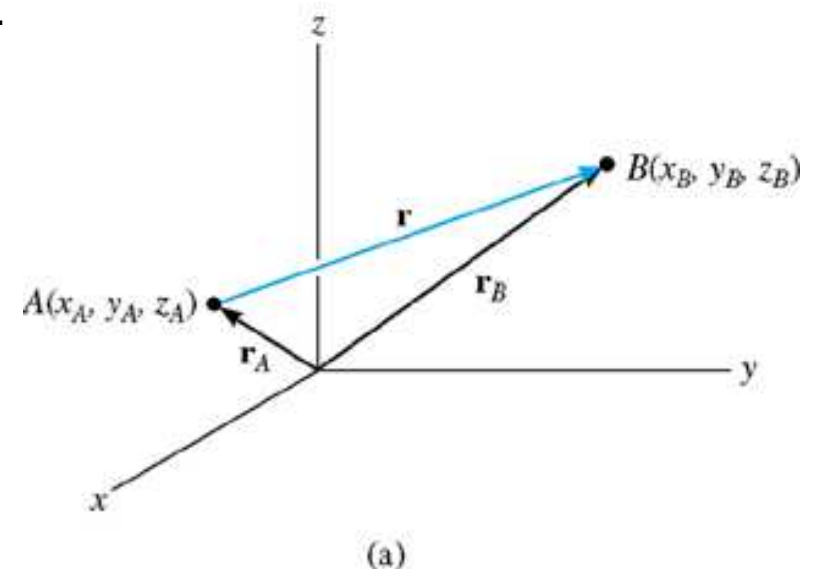
- Observe que a adição de vetor da origem para a extremidade dos três componentes resulta do vetor  $\mathbf{r}$ , figura abaixo. Começando na origem,  $O$ , desloca-se sobre  $x$  na direção  $+\mathbf{i}$ , depois sobre  $y$  na direção  $+\mathbf{j}$  e finalmente sobre  $z$  na direção  $+\mathbf{k}$  para atingir o ponto  $P(x, y, z)$ .



(b)

# Vetor Posição

- Em geral, o vetor posição é orientado do ponto **A** para o ponto **B** no espaço, figura abaixo. Como uma questão de convenção esse vetor é designado pelo símbolo  $\underline{r}$ , algumas vezes serão utilizados *índices subscritos* para indicar o ponto de origem e o ponto para o qual está orientado. Assim,  $\underline{r}$  também será designado  $\underline{r}_{AB}$ . Observe também que  $\underline{r}_A$  e  $\underline{r}_B$ , são escritos com apenas um índice, visto que se estendem a partir da origem das coordenadas.



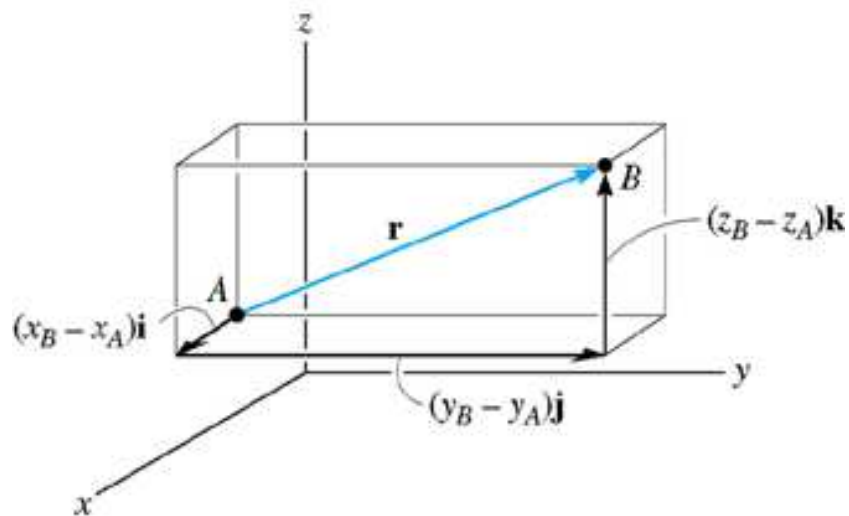
# Vetor Posição

- Da figura anterior, pela adição de vetores ponta-cauda, é necessário que:
- $\underline{r}_A + \underline{r} = \underline{r}_B$
- Resolvendo-se em  $r$  e expressando-se  $\underline{r}_A$  e  $\underline{r}_B$  na forma vetorial cartesiana, tem-

se:

$$r = r_B - r_A = (x_B i + y_B j + z_B k) - (x_A i + y_A j + z_A k)$$

$$r = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$$



(b)

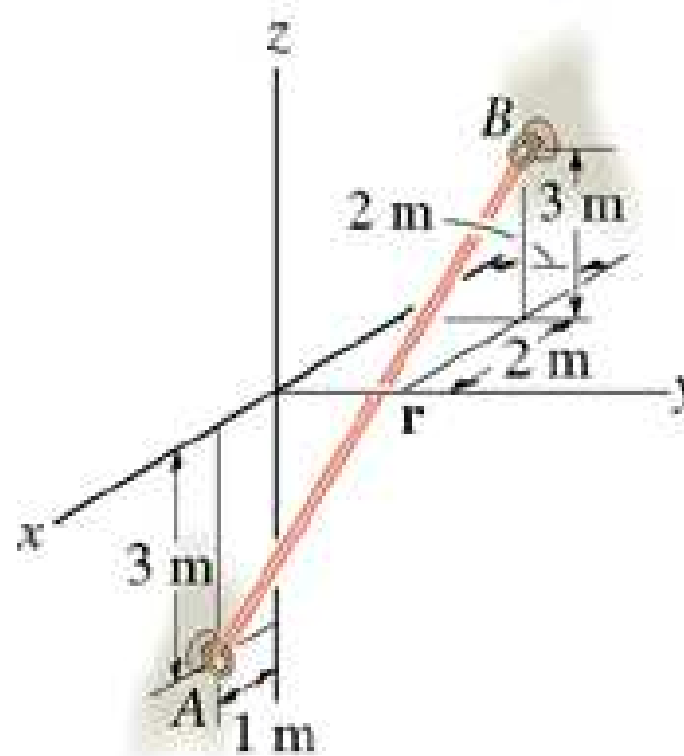
# Vetor Posição

- **Na Prática:** O comprimento e a direção do cabo AB usado para suportar a chaminé são determinados medindo-se as coordenadas dos pontos A e B e usando-se os eixos  $x, y, z$ .
- O vetor posição  $\underline{r}$  ao longo do cabo é então estabelecido. A intensidade  $r$  representa o comprimento do cabo e a direção dele é definida por  $\alpha, \beta, \gamma$ , que são determinados pelos Componentes do vetor unitário calculados a Partir do vetor unitário  $\underline{u}$ .



# Vetor Posição

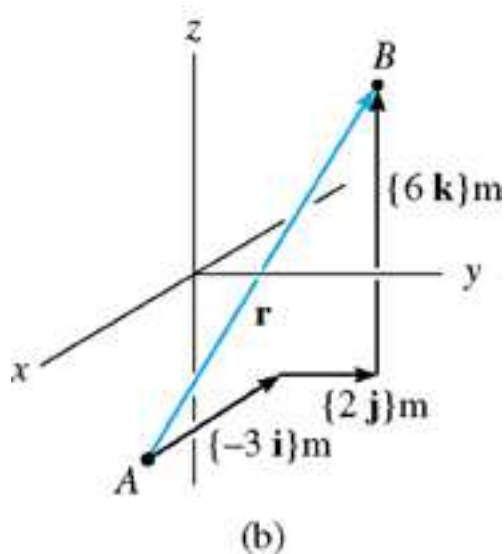
- Exemplo: Uma fita elástica está presa aos pontos A e B, como mostra a Figura abaixo. Determine seu comprimento e sua direção, medidos de A para B.



(a)

# Vetor Posição

- Solução:
- 1º - estabelecer um vetor posição de A para B, Figura abaixo.
- 2º - determinar as coordenadas dos pontos de origem e de extremidade do vetor:
- A(1, 0, -3)m e B(-2, 2, 3)m, respectivamente;
- Calcula-se o vetor  $\underline{r}$ :



$$\begin{aligned}r &= r_B - r_A = (x_B i + y_B j + z_B k) - (x_A i + y_A j + z_A k) \\r &= (-2 - 1)i + (2 - 0)j + (3 - (-3))k \\r &= (-3i + 2j + 6k)m\end{aligned}$$

# Vetor Posição

- A intensidade de  $\underline{r}$  representa o comprimento da fita elástica:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2}$$
$$r = 7m$$

- Definindo um vetor unitário na direção  $r$ , temos:

$$u = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{-3}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$$

- Os componentes desse vetor unitário dão os ângulos diretores coordenados:

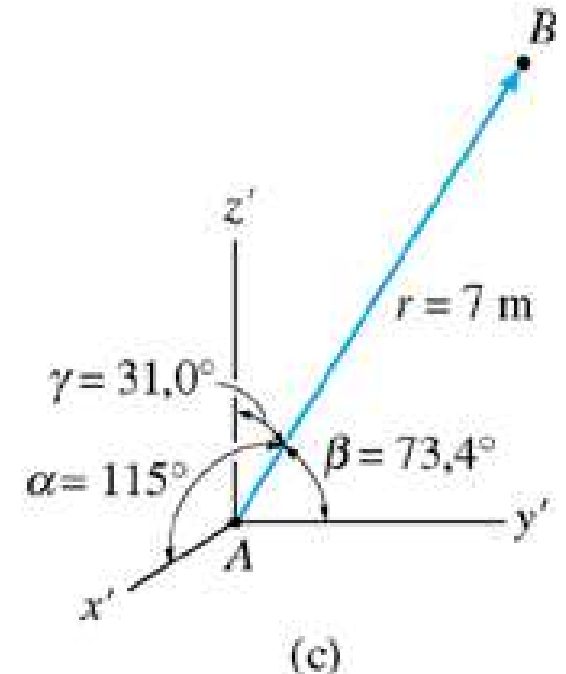
# Vetor Posição

- Cálculo dos ângulos diretores coordenados:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{7}\right) = 115^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) = 73,4^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{6}{7}\right) = 31^\circ$$



- Esses ângulos são medidos a partir dos eixos positivos de um sistema de coordenadas cartesianas localizado na origem de  $\mathbf{r}$ , ponto  $A$ , como mostrado na figura acima.

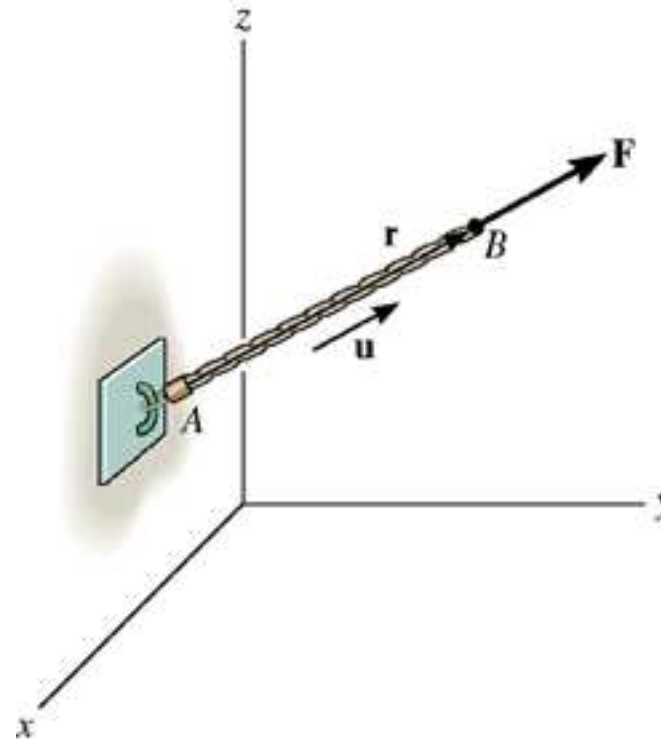
# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- Pode-se definir  $\underline{F}$  como sendo um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha **mesma direção e sentido** que o vetor posição  $\underline{r}$  orientado do ponto A para o ponto B da corda, Figura abaixo. Essa direção comum é especificada pelo vetor unitário  $\underline{u}$ , então:

$$\vec{F} = F\vec{u} = F\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

- $\underline{F}$ , unidade de força;
- $\underline{r}$ , unidade de comprimento.



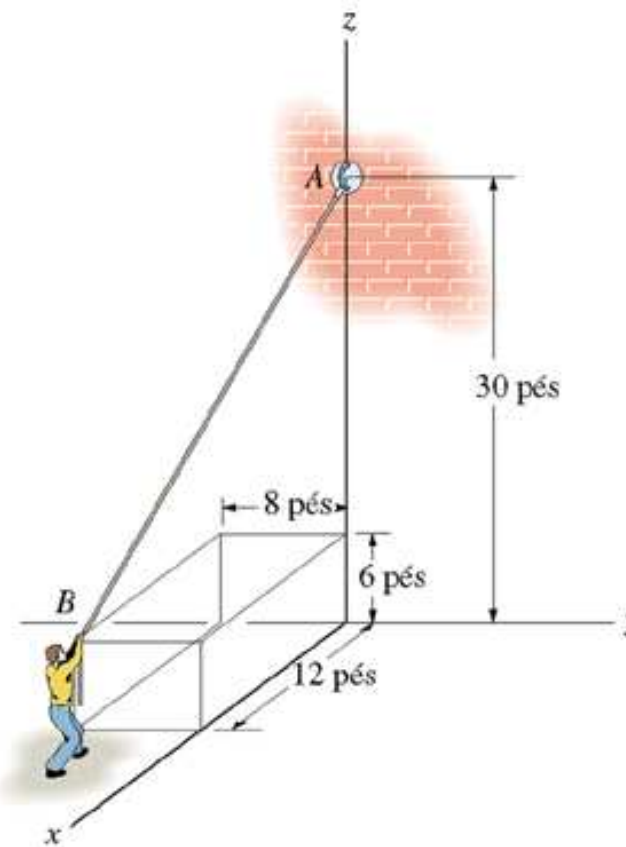
# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- **Na Prática:** A força  $F$  que atua ao longo da corrente pode ser representada como um vetor cartesiano definindo-se primeiro os eixos  $x, y, z$ , formando-se um vetor posição  $\underline{r}$  ao longo do comprimento da corrente e determinando-se depois o vetor unitário  $\underline{u}$  correspondente que define a direção tanto da corrente quanto da força. Finalmente, a intensidade da força é combinada com sua direção,  $\underline{F} = F\underline{u}$ .



# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

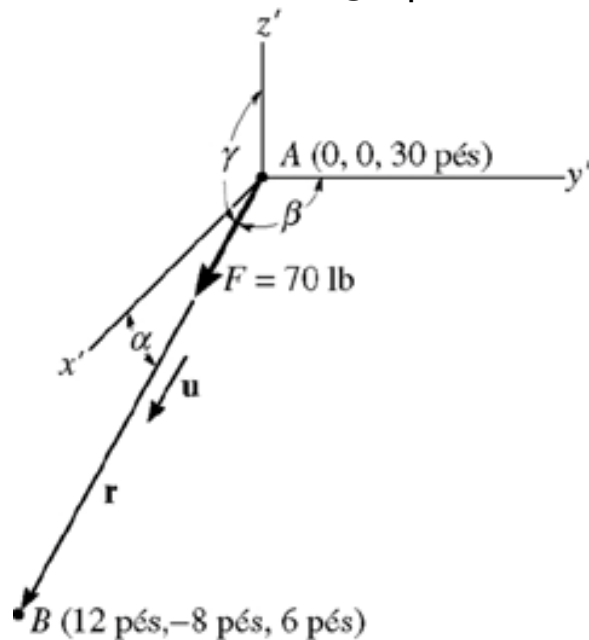
- Exemplo: O homem mostrado na Figura abaixo puxa a corda com uma força de 70 lb. Represente essa força, que atua sobre o suporte A, como vetor cartesiano e determine sua direção.



(a)

# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- Solução:
- 1º - estabelecer um vetor posição de A para B, Figura abaixo.
- 2º - determinar as coordenadas dos pontos de origem e de extremidade do vetor:
- A(0, 0, 30)pés e B(12,-8,6)pés, respectivamente;



(b)

$$r = r_B - r_A = (x_B i + y_B j + z_B k) - (x_A i + y_A j + z_A k)$$

$$r = (12 - 0)i + (-8 - 0)j + (6 - 30)k$$

$$r = (12i - 8j - 24k) \text{ pés}$$

# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- A intensidade de  $\underline{r}$  representa o comprimento da corda AB:

$$r = \sqrt{(12)^2 + (-8)^2 + (-24)^2}$$
$$r = 28 \text{ pés}$$

- Definindo-se o vetor unitário que determina a direção e o sentido de  $\underline{r}$  e  $\underline{F}$ , temos:

$$\underline{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{12}{28}i - \frac{8}{28}j - \frac{24}{28}k$$

- Como  $\underline{F}$  tem intensidade de 70 lb e direção especificada por  $\underline{u}$ , temos:

$$\vec{F} = F \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = 70 \left( \frac{12}{28}i - \frac{8}{28}j - \frac{24}{28}k \right)$$
$$\vec{F} = \{30i - 20j - 60k\}lb$$

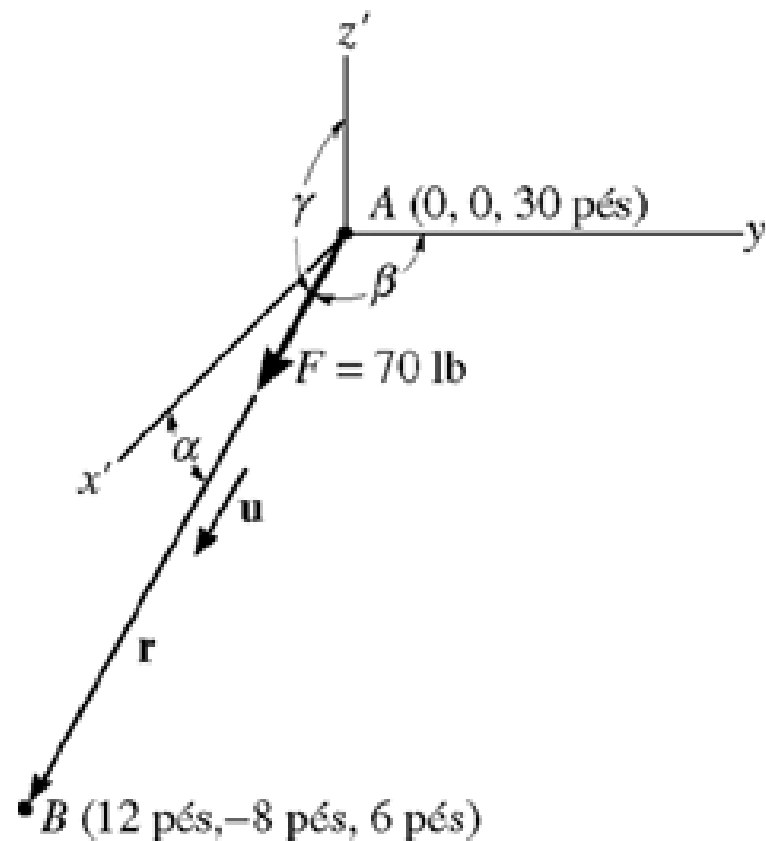
# Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

- Os componentes desse vetor unitário dão os ângulos diretores coordenados:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{28}\right) = 64,6^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{-8}{28}\right) = 107^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-24}{28}\right) = 149^\circ$$



(b)

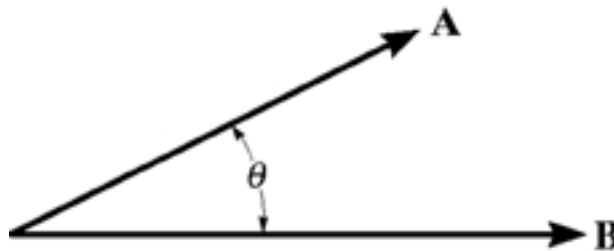
# Produto Escalar

■ Marcio Varela

# Produto Escalar

- O produto de vetores  $A$  e  $B$ , escrito  $A \cdot B$  e lido como “ $A$  escalar  $B$ ”, é definido como o produto das intensidades de  $A$  e de  $B$  e do Cosseno do ângulo  $\theta$  entre suas origens. Expresso na forma de equação:

- $A \cdot B = AB \cdot \cos \theta$



- Onde  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .

# Produto Escalar

- Leis das Operações

- Lei Comutativa:

$$A.B = B.A$$

- Multiplicação por Escalar:

$$a.(A.B) = (a.A).B = A.(a.B) = (A.B).a$$

- Lei Distributiva:

$$A.(B + D) = (A.B) + (A.D)$$

# Produto Escalar

- Definição de Vetor Cartesiano

- $A \cdot B = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$

- Aplicações:

- O produto escalar tem duas aplicações importantes:

1 - Determinar o ângulo entre dois vetores ou reta que se interceptam. O ângulo  $\theta$  entre as origens pode ser determinado pela equação:

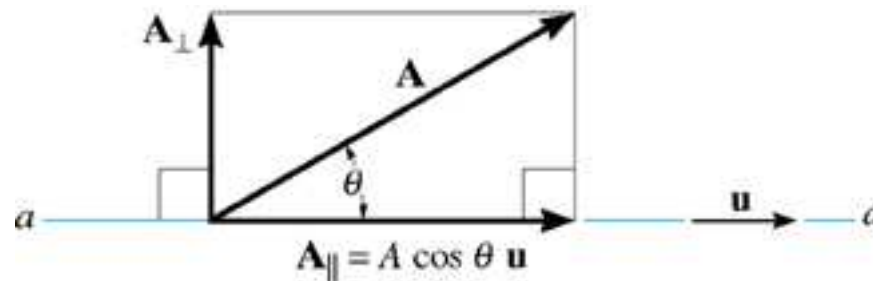
$$\theta = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{AB}\right); \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

# Produto Escalar

2 – Determinar os componentes paralelo e perpendicular de vetor a uma reta.

2.1 - Componente Paralelo:

$$A_{\parallel} = A \cdot \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$



- Portanto, a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  ao longo de uma reta é determinada pelo produto escalar de  $\mathbf{A}$  e o vetor unitário  $\mathbf{u}$  que define a direção da reta.
- Dessa forma o componente  $A_{\parallel}$  representado como um vetor é:

$$\mathbf{A}_{\parallel} = A \cdot \cos \theta \mathbf{u} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

# Produto Escalar

## 2.2 – Componente Perpendicular:

- O componente perpendicular a reta  $aa'$  pode ser obtido de duas maneiras:

$$\theta = \arccos\left(\frac{Au}{A}\right); \text{ então: } A_{\perp} = A \cdot \text{sen}\theta;$$

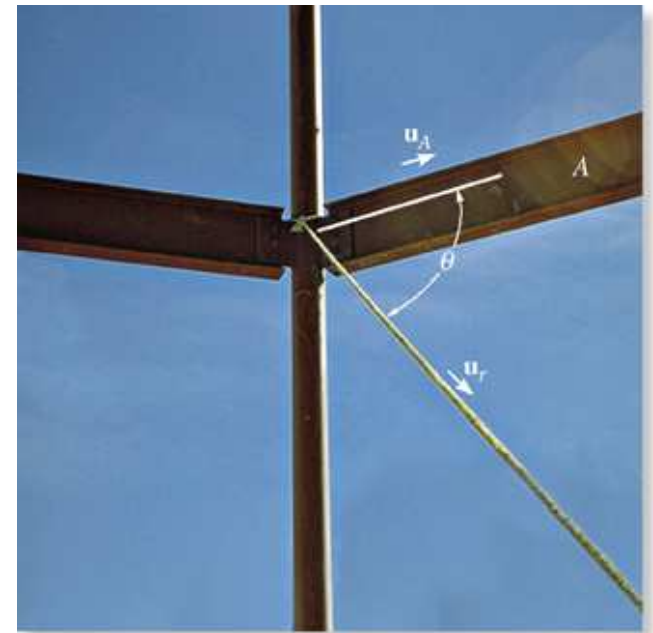
- Da mesma forma se  $A_{\parallel}$  for conhecido, então, pelo teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

$$A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{\parallel}^2};$$

# Produto Escalar

- **Na Prática:**
- O ângulo  $\theta$  entre a corda e a viga A pode ser determinado usando-se o produto escalar. Definem-se os **vetores posição** ou **vetores unitários** ao longo da viga,
- $u_A = \frac{\vec{r}_A}{r_A}$ ; e ao longo da corda,  $u_r = \frac{\vec{r}_r}{r_r}$ ; como  $\theta$  é definido entre as caudas desses vetores, pode-se resolver em  $\theta$  usando-se:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_r}{r_A \cdot r_r}\right) = \arccos u_A \cdot u_r;$$



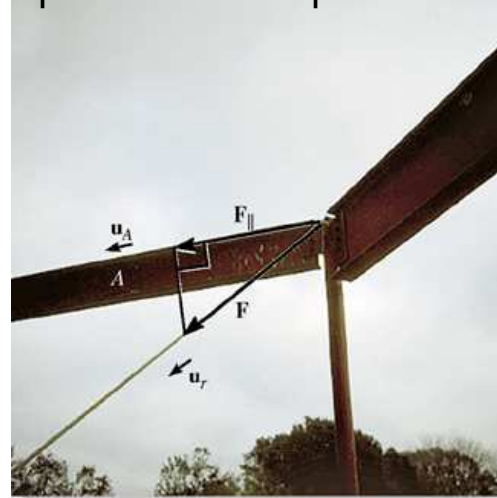
# Produto Escalar

- Na Prática:

- Se a corda exerce uma força  $F$  sobre a junta, a projeção dessa força ao longo da viga A pode ser determinada definindo-se primeiro a direção da viga, usando-se

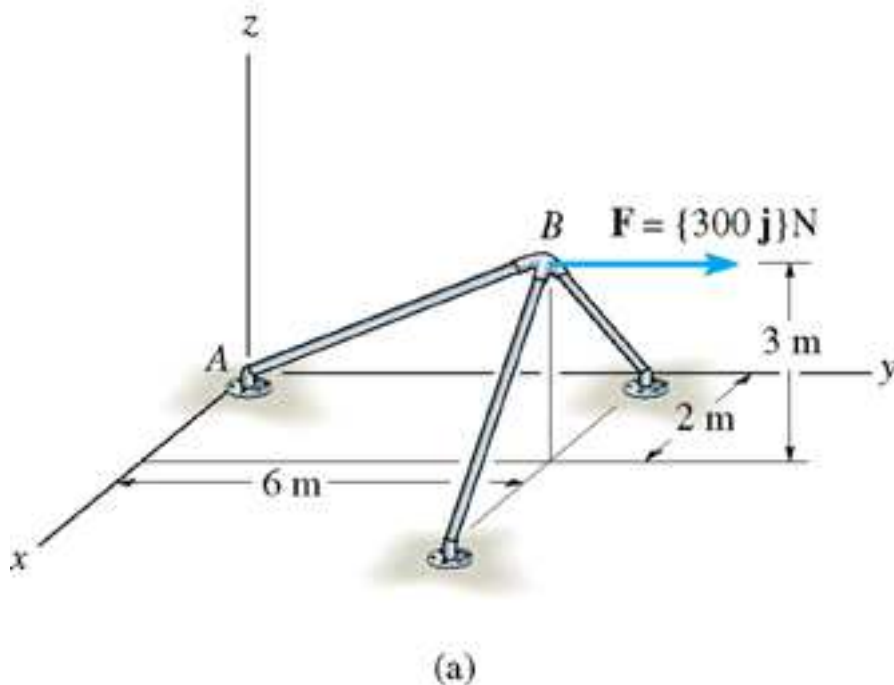
um vetor unitário  $u_A = \frac{\vec{r}_A}{r_A}$ ; e depois definindo-se a força como um vetor cartesiano,  $F = F \cdot \left( \frac{\vec{r}_r}{r_r} \right) = Fu_r$ . Aplicando-se o produto escalar, a projeção será:

$$F_{\parallel} = Fu_A.$$



# Produto Escalar

- Exemplos:
- A estrutura mostrada abaixo está submetida a uma força horizontal  $F = \{300\mathbf{j}\}$  N. Determine a intensidade dos componentes da força paralela e perpendicular ao elemento AB.



1º - Determina-se o vetor posição  $\mathbf{r}_B$ .

Com base na figura temos:

$$\mathbf{r}_B = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$$

# Produto Escalar

- 2º - A intensidade do componente de F ao longo de AB é igual ao produto escalar de F pelo vetor unitário  $u_B$ , que define a direção de AB, como:

$$u_B = \frac{\vec{r}_B}{r_B} = \frac{2i + 6j + 3k}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}}$$

$$u_B = 0,286i + 0,857j + 0,429k;$$

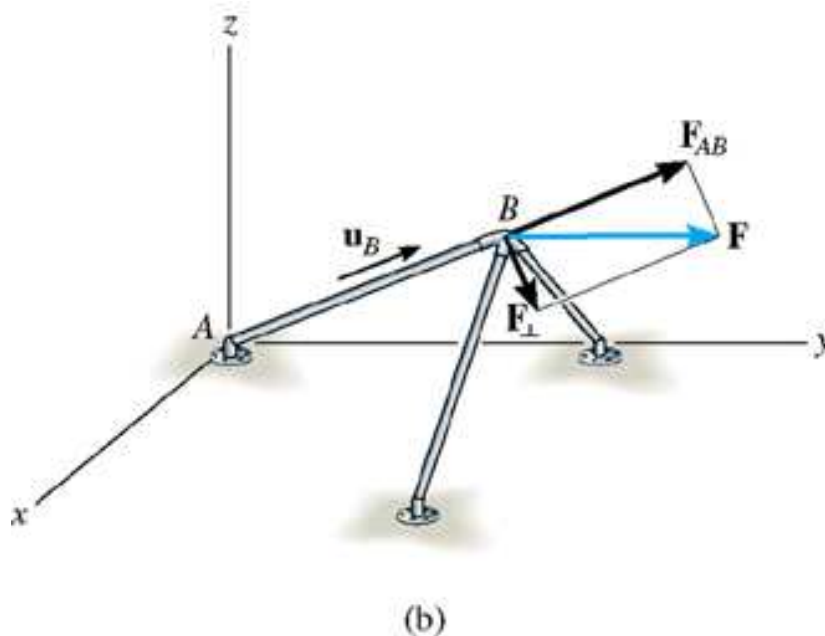
então:

$$F_{AB} = F \cos \theta = \vec{F} \cdot u_B$$

$$F_{AB} = (300j) \cdot (0,286i + 0,857j + 0,429k)$$

$$F_{AB} = (0) \cdot (0,286i) + (300j) \cdot (0,857j) + (0) \cdot (0,429k)$$

$$F_{AB} = 257,1N$$



# Produto Escalar

- Como o resultado é um escalar positivo,  $F_{AB}$  tem o mesmo sentido de direção de  $u_B$ .
- Expressando  $F_{AB}$  na forma vetorial cartesiana, temos:

$$F_{AB} = F \cos \theta \cdot u_B = F_{AB} \cdot u_B$$

$$F_{AB} = (257,1N) \cdot (0,286i + 0,857j + 0,429k)$$

$$F_{AB} = \{73,5i + 220j + 110k\}$$

- O componente perpendicular é portanto:

$$F_{\perp} = F - F_{AB}$$

$$F_{\perp} = 300j - (73,5i + 220j + 110k)$$

$$F_{\perp} = \{-73,5i + 80j - 110k\}N$$

# Produto Escalar

- Sua intensidade é determinada tanto por meio desse vetor como por Pitágoras:

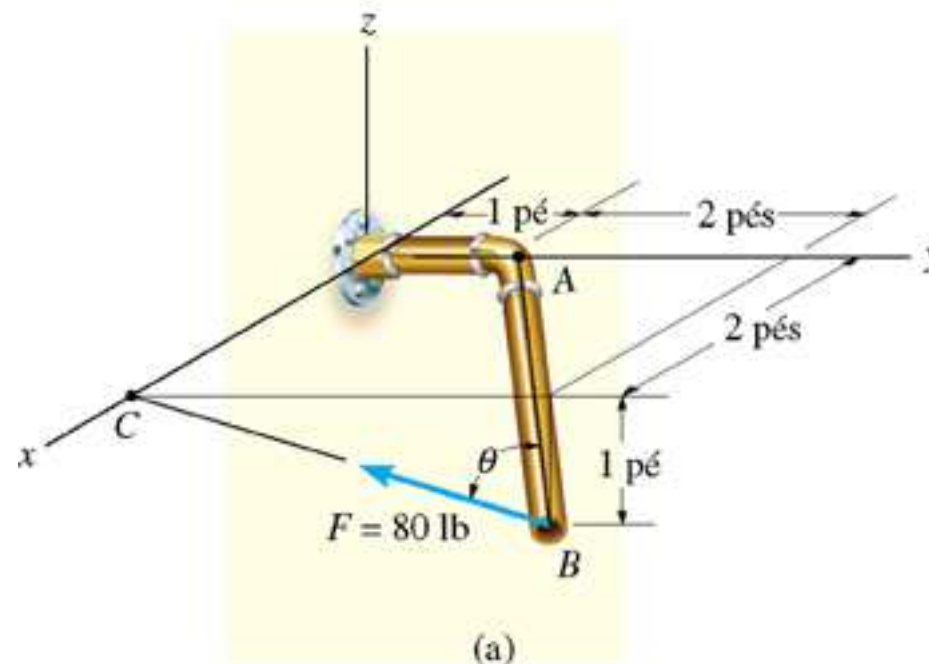
$$F_{\perp} = \sqrt{F^2 - F_{AB}^2}$$

$$F_{\perp} = \sqrt{(300)^2 - (257,1)^2}$$

$$F_{\perp} = 155N$$

# Produto Escalar

- O tubo da Figura abaixo está sujeito a força  $F = 80 \text{ lb}$ . Determine o ângulo  $\theta$  entre  $F$  e o seguimento BA do tubo e as grandezas dos componentes de  $F$ , que são paralelos e perpendiculares a BA.

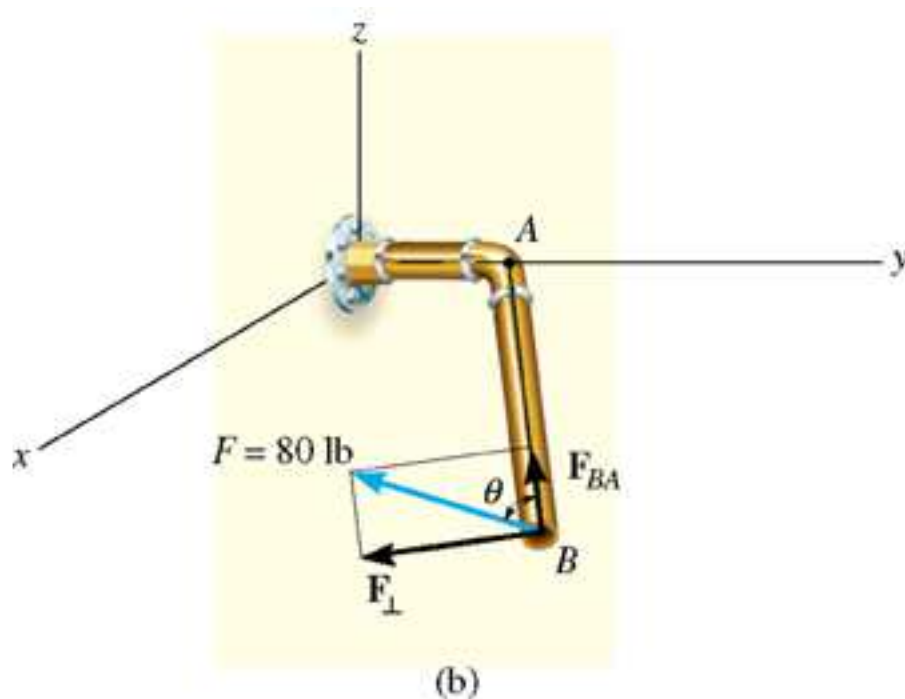


# Produto Escalar

- Solução:
- Ângulo  $\theta$ :
- Primeiro define-se os vetores posição de B para A e de B para C.
- $A = (0, 1, 0); \quad B = (2, 3, -1); \quad C = (2, 0, 0);$
- $\mathbf{r}_{BA} = (A - B) = [(0-2)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (0-(-2))\mathbf{k}]$
- $\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}$  pés
- $\mathbf{r}_{BC} = (C - B) = [(2-2)\mathbf{i} + (0-3)\mathbf{j} + (0-(-1))\mathbf{k}]$
- $\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}$  pés

# Produto Escalar

- Solução:
- Ângulo  $\theta$  - continuação:
- Em seguida, calcula-se o ângulo  $\theta$  entre as caudas desses dois vetores.



$$\cos \theta = \frac{\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{BC}}{r_{BA} \cdot r_{BC}}$$

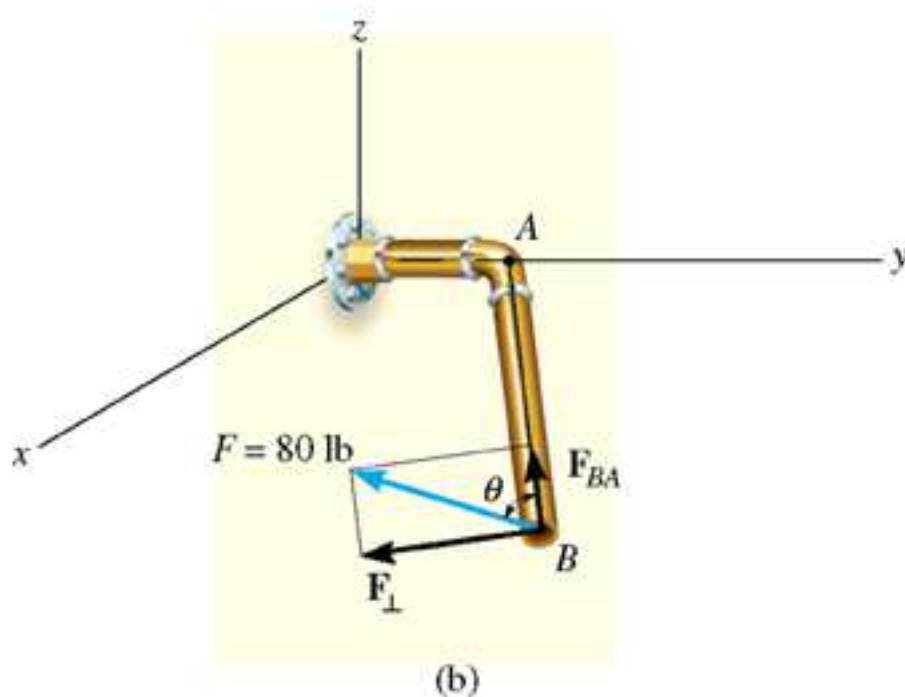
$$\cos \theta = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \times \sqrt{(-3)^2 + (1)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{7}{3\sqrt{10}} = 0,7379$$

$$\theta = 42,5^\circ$$

# Produto Escalar

- Solução:
- Componentes de  $F$ :
- A força  $F$  é decomposta duas componentes, figura, desta forma calcula-se  $F_{BA} = F \cos \theta$  e  $F_{\perp} = F \cdot \sin \theta$ .



$$F_{BA} = F \cos \theta$$

$$F_{BA} = 80 \cdot \cos 42,5^\circ$$

$$F_{BA} = 59 \text{ lb}$$

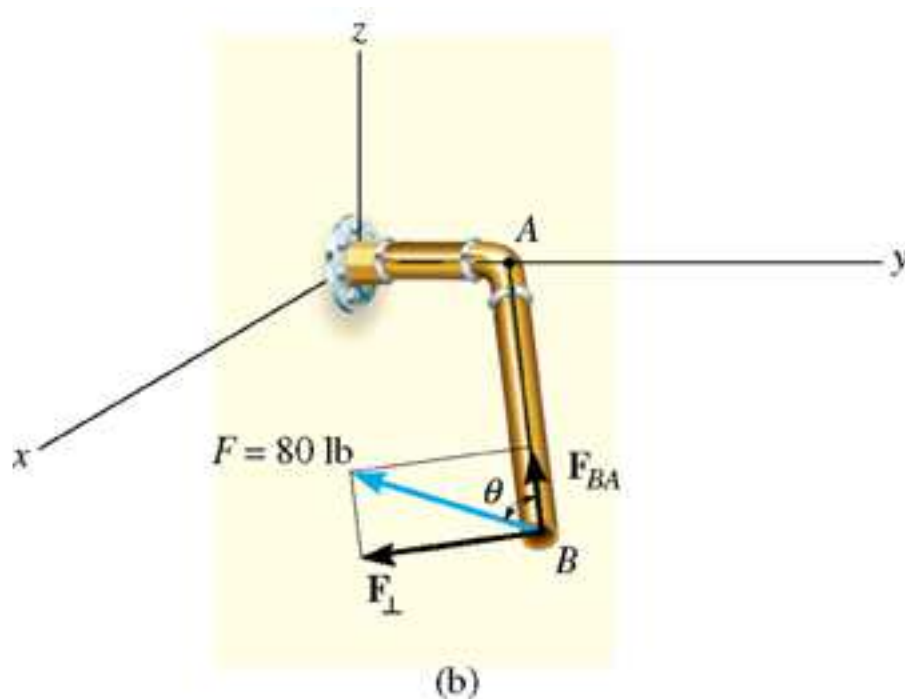
$$F_{\perp} = F \sin \theta$$

$$F_{\perp} = 80 \cdot \sin 42,5^\circ$$

$$F_{\perp} = 54 \text{ lb}$$

# Produto Escalar

- Solução Trivial:
- Componentes de  $F$  – continuação:
- Determina-se os unitários  $\mathbf{u}_{BA}$  e  $\mathbf{u}_{BC}$ :



$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}}$$
$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

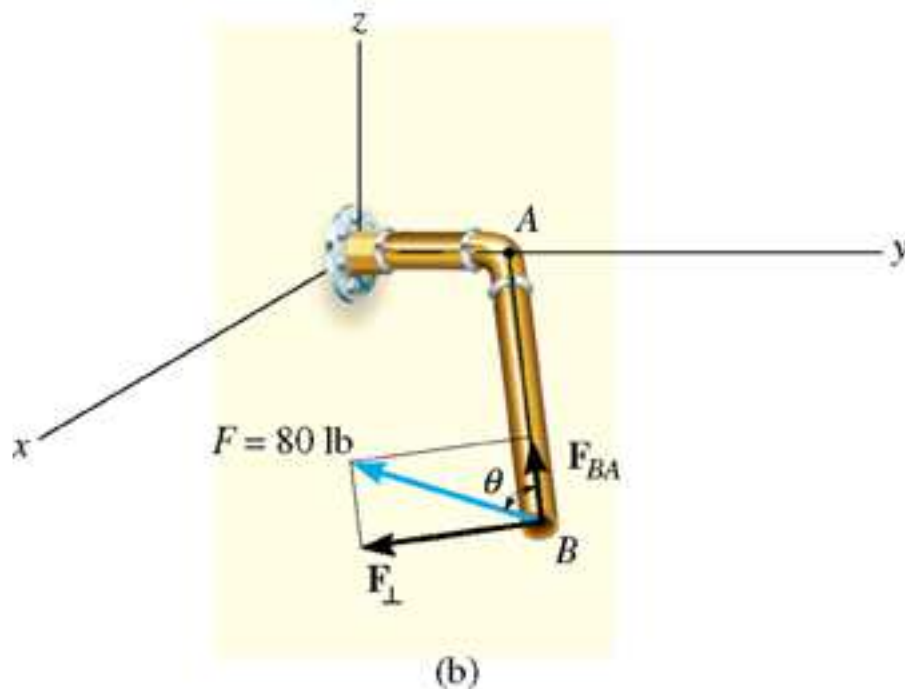
$$\mathbf{u}_{BA} = -\frac{2\mathbf{i}}{3} - \frac{2\mathbf{j}}{3} + \frac{1\mathbf{k}}{3}$$

$$\mathbf{u}_{BC} = \frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}}$$
$$\mathbf{u}_{BC} = \frac{(-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}}$$

$$\mathbf{u}_{BC} = -\frac{3\mathbf{j}}{\sqrt{10}} + \frac{1\mathbf{k}}{\sqrt{10}}$$

# Produto Escalar

- Solução Trivial:
- Componentes de F – continuação:
- Determina-se F como Vetor Cartesiano
- e  $F_{BA}$ .



$$F = 80 \cdot \left( \frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}} \right)$$

$$F = 80 \cdot \left( -\frac{3j}{\sqrt{10}} + \frac{1k}{\sqrt{10}} \right)$$

$$F = (-75,89j + 25,3k)lb$$

então:

$$F_{BA} = F \cdot u_{AB}$$

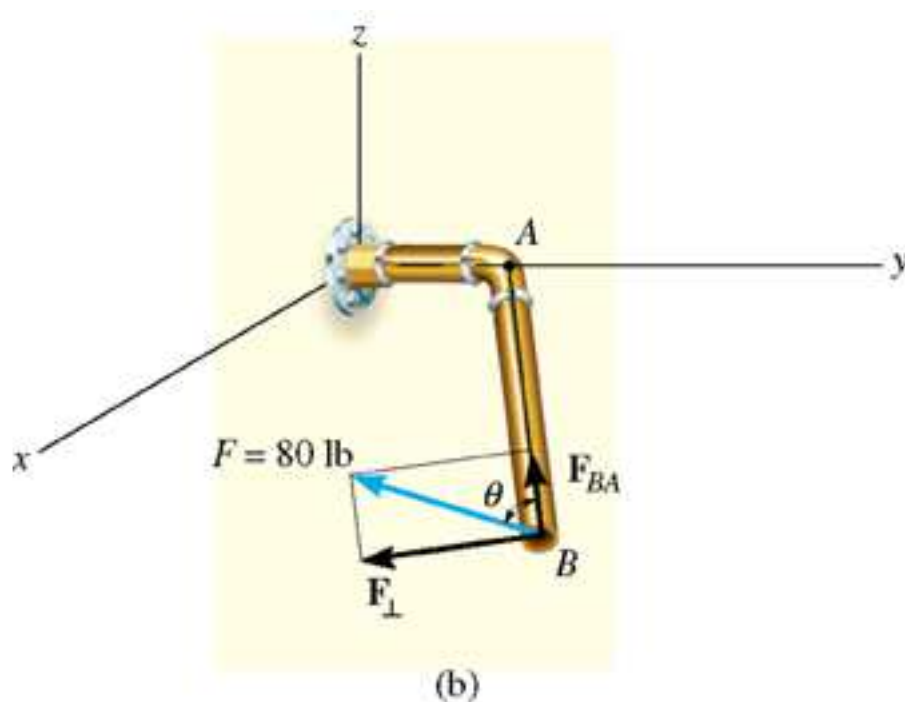
$$F_{BA} = (-75,89j + 25,3k) \cdot \left( -\frac{2i}{3} - \frac{2j}{3} + \frac{1k}{3} \right)$$

$$F_{BA} = 0 + 50,60 + 8,43$$

$$F_{BA} = 59lb$$

# Produto Escalar

- Solução Trivial:
- Componentes de  $F$  – continuação: Com  $F_{BA}$  e  $F$  determina-se  $F_{\perp}$ :



$$F_{\perp} = \sqrt{F^2 - F_{AB}^2}$$

$$F_{\perp} = \sqrt{(80)^2 - (59)^2}$$

$$F_{\perp} = 54 \text{ lb}$$