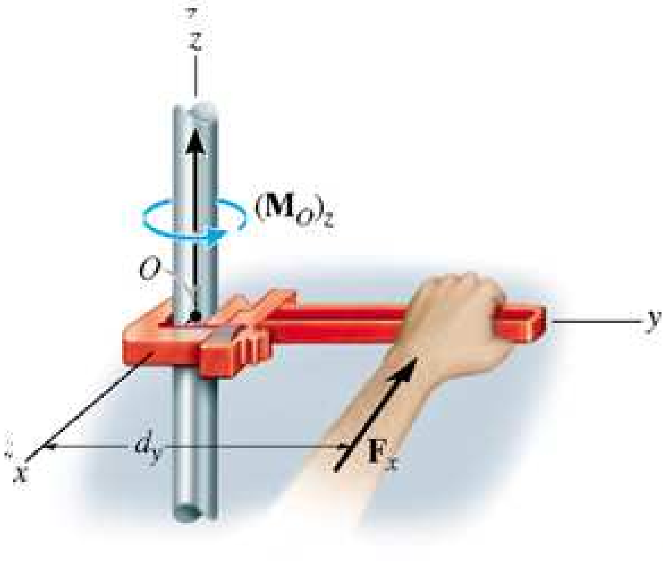
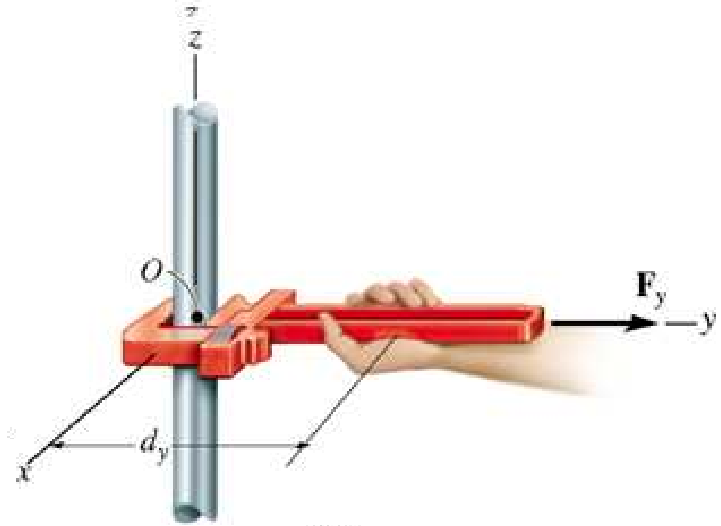
MOMENTO DE UMA FORÇA ESCALAR

Marcio Varela

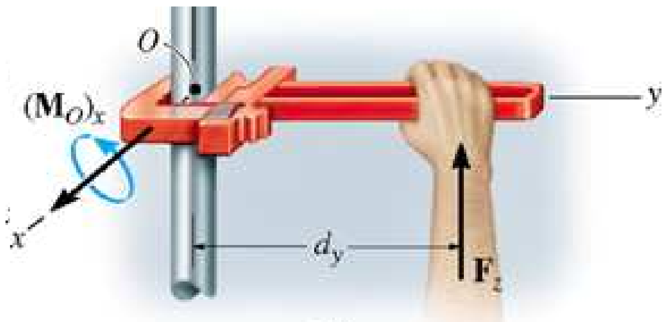
Formulação Escalar



(a)



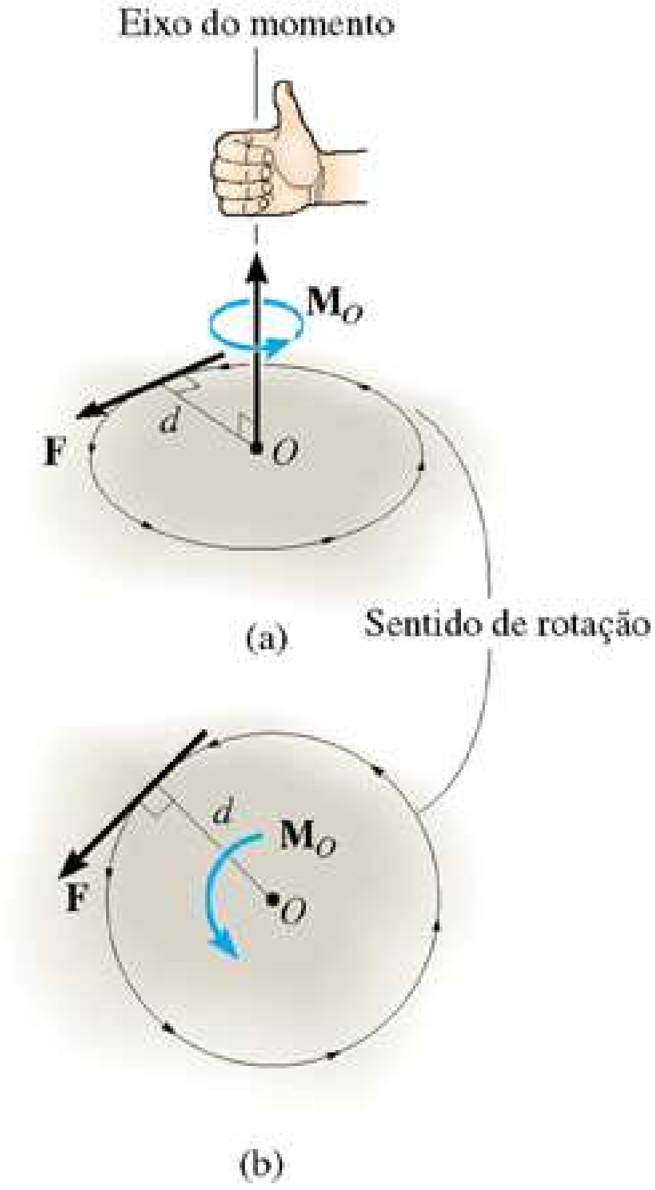
(c)

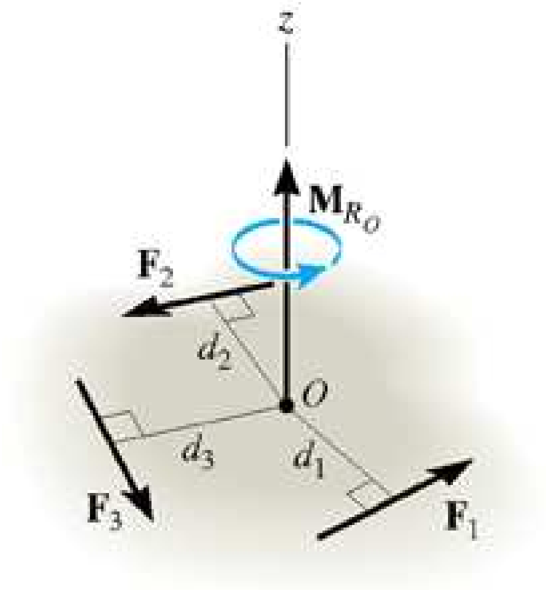


(b)

- $\mathbf{M_0 = F.d}$

Formulação Escalar

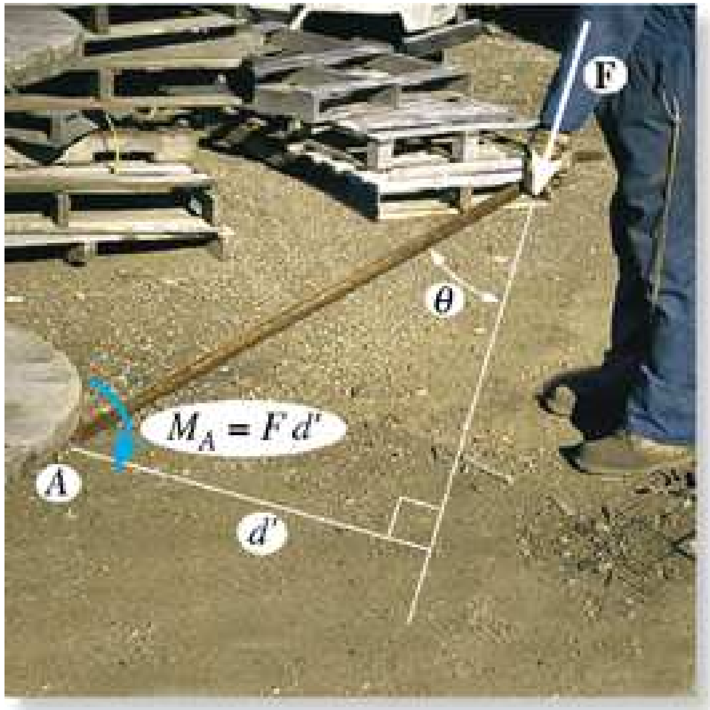




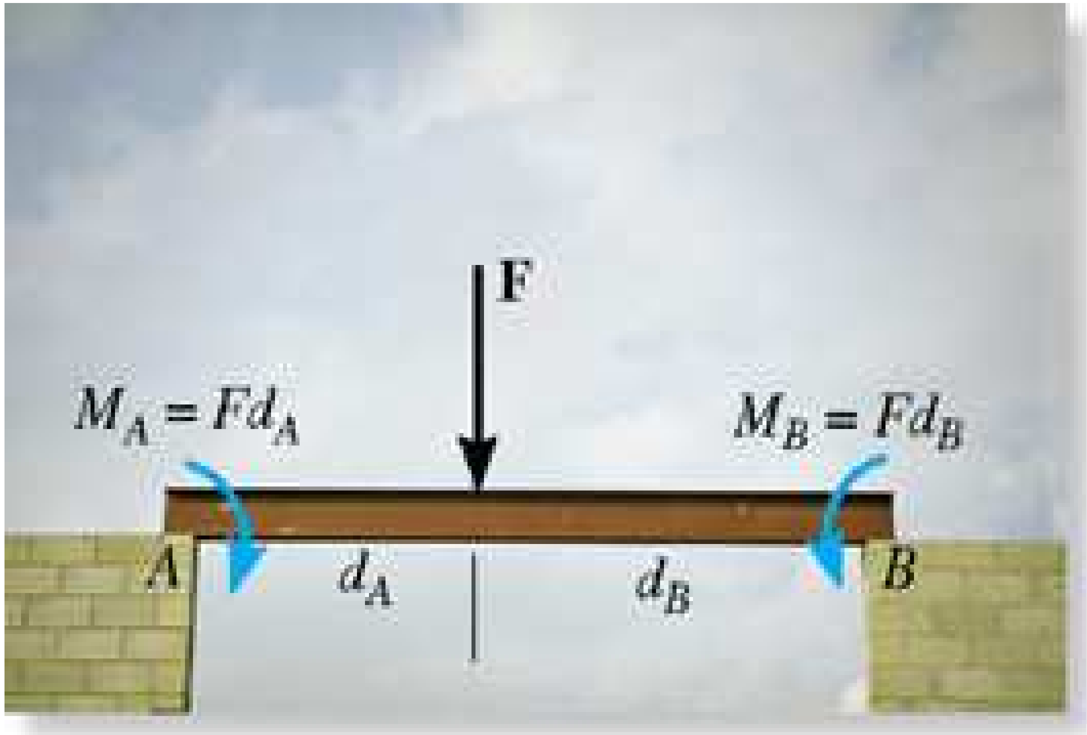
$$M = F.d$$

Formulação Escalar

$$M_R = \sum F.d$$

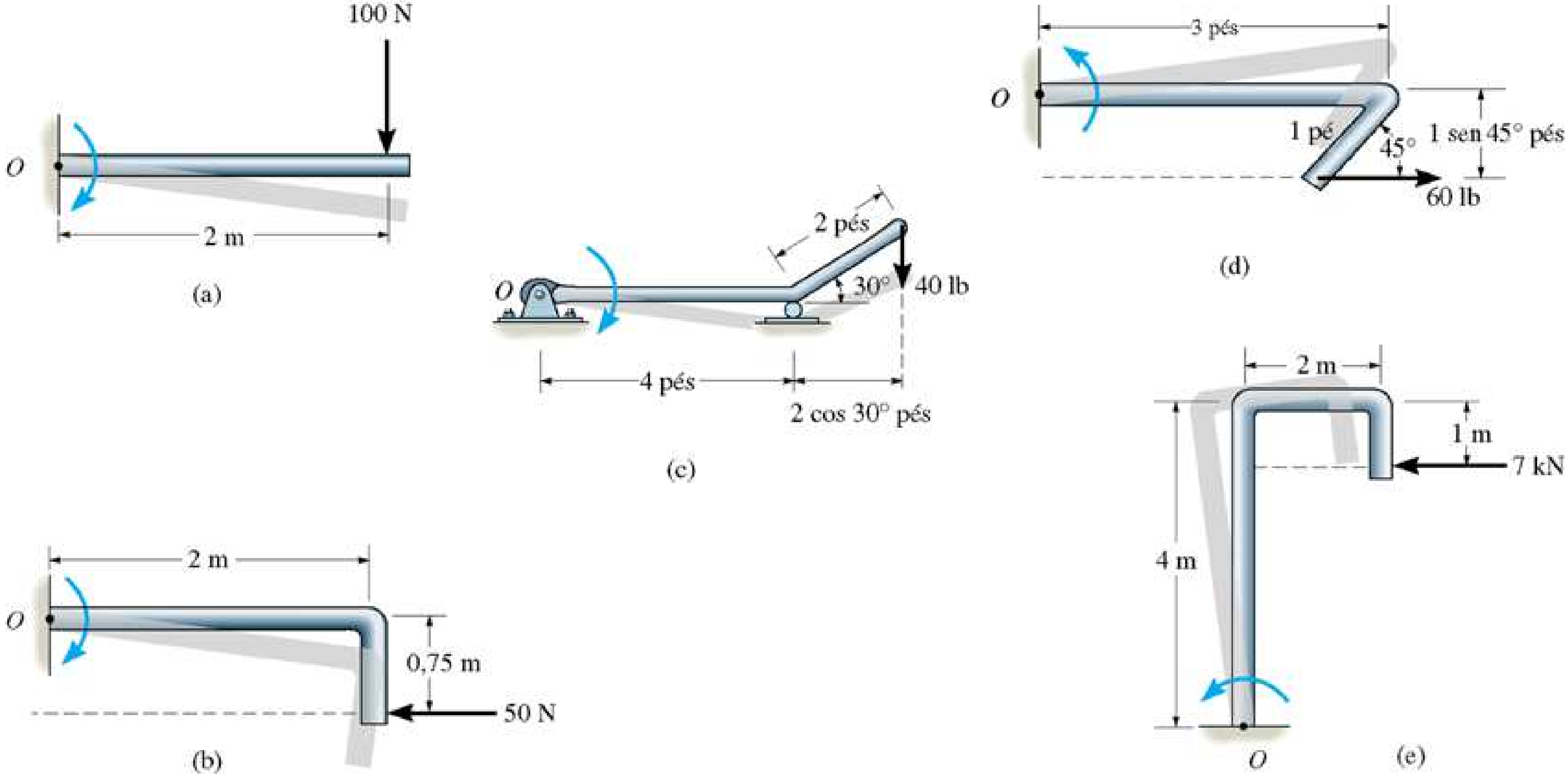


Formulação Escalar



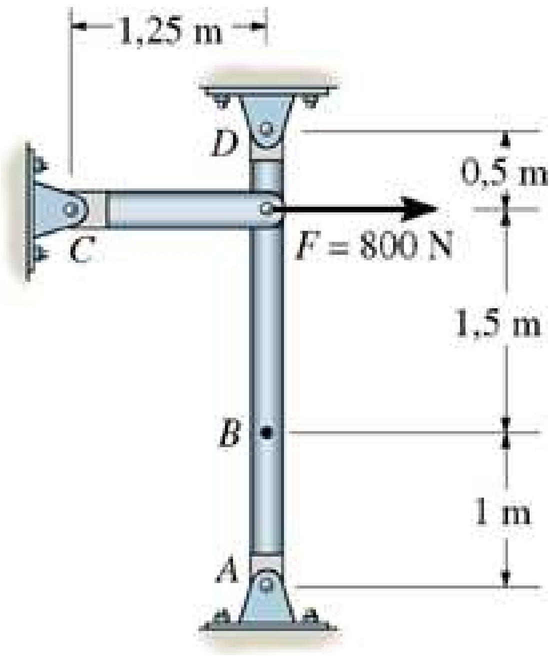
Formulação Escalar

- Exemplo: Determine o momento da força em relação ao ponto 0 em cada caso ilustrado abaixo.



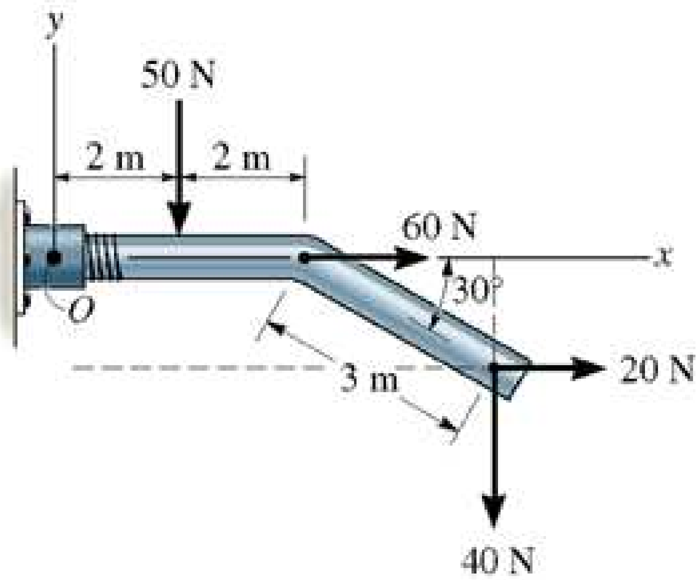
Formulação Escalar

- Determine os momentos da força 800 N que atua sobre a estrutura na figura abaixo em relação aos pontos A, B, C e D.



Formulação Escalar

- Determine o momento resultante, das quatro forças que atuam no haste abaixo, em relação ao ponto 0.



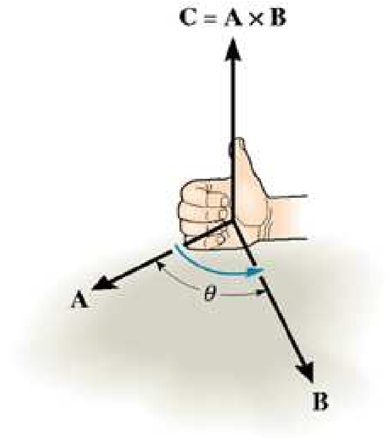
Formulação Vetorial

- O produto vetorial de dois vetores ***A*** e ***B*** produz um vetor ***C***.

    - $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

- A Intensidade de ***C*** é definida como o produto das intensidades de ***A*** e ***B*** e o seno do ângulo θ entre os dois vetores, prolongando-os, se necessário de modo que suas origens se localizem no mesmo ponto ($0 \leq \theta \leq 180º$).

    - $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{sen}\ \theta)$

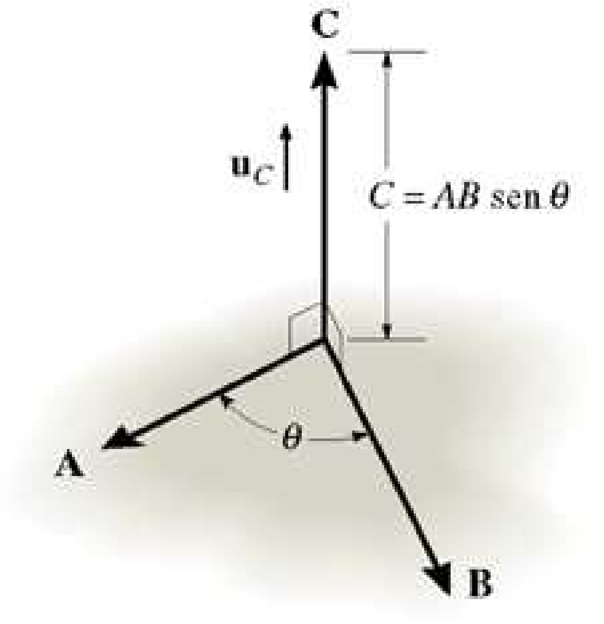


Formulação Vetorial

- Direção e Sentido: O vetor ***C*** tem direção perpendicular ao plano contendo ***A*** e ***B***, de modo que seu sentido é determinado pela regra da mão direita. Conhecendo a intensidade, direção e o sentido de **C**, podemos escrever:

  - $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A \,.\, B \times \textit{sen}\ \theta).\mathbf{u_c}$

- Onde o escalar ***A.B.senθ*** define a intensidade de **C** e o vetor unitário $\mathbf{u}_c$ define sua direção e seu sentido.



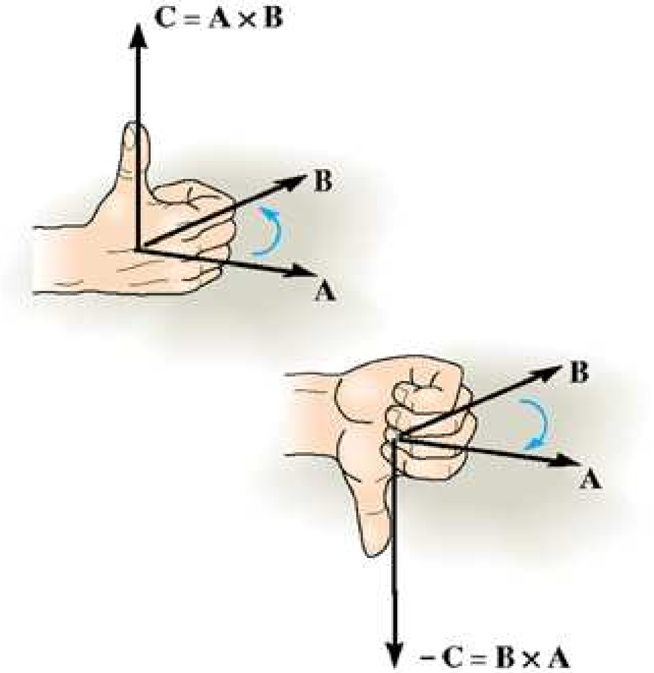
Formulação Vetorial

- **Leis de Operação**:
- 1 . O produto vetorial é não-comutativo, isto é:

  - $A \times B \neq B \times A$,

- Ou seja:

  - $A \times B = -B \times A$.



Formulação Vetorial

- 2. Multiplicação por escalar:
    - a.(A x B) = (a.A) x B = A x (a.B) = (A x B).a
- 3. Lei distributiva:
    - A x (B + D) = (A x B) + (A x D)

Formulação Vetorial

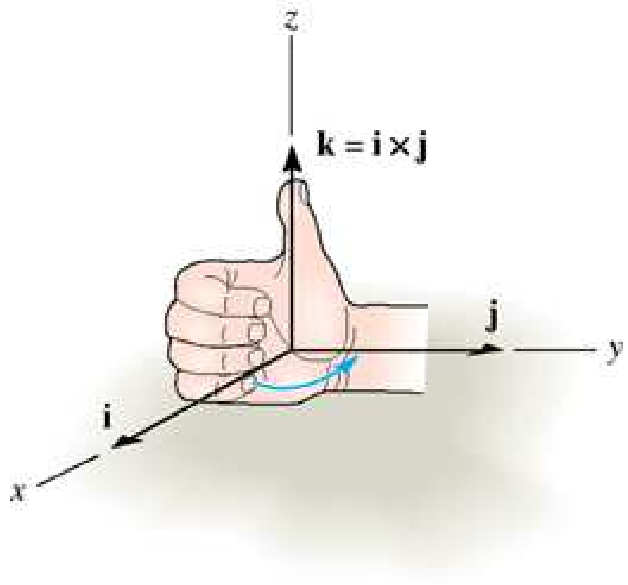
- Formulação vetorial cartesiana:

- i x j = k   i x k = -j   i x i = 0
- j x k = i   j x i = -k   j x j = 0
- k x i = j   k x j = -i   k x k = 0

- $A \times B = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k)$

- $A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) i - (A_x B_z - A_z B_x) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$

- Exercício: Prove a afirmativa acima.



Formulação Vetorial

- A equação anterior pode ser representada pela matriz abaixo:

$$AxB = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ Ax & \mathrm{Ay} & \mathrm{Az} \\ Bx & \mathrm{By} & \mathrm{Bz} \end{vmatrix}$$

- Para determinarmos os elementos i, j, k basta calcularmos os determinantes para esses termos:

- Para o elemento i:

$$\begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ A_x & \mathrm{A}_{\mathrm{y}} & \mathrm{A}_{\mathrm{z}} \\ B_x & \mathrm{B}_{\mathrm{y}} & \mathrm{B}_{\mathrm{z}} \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) i$$

Formulação Vetorial

- Para o elemento j:

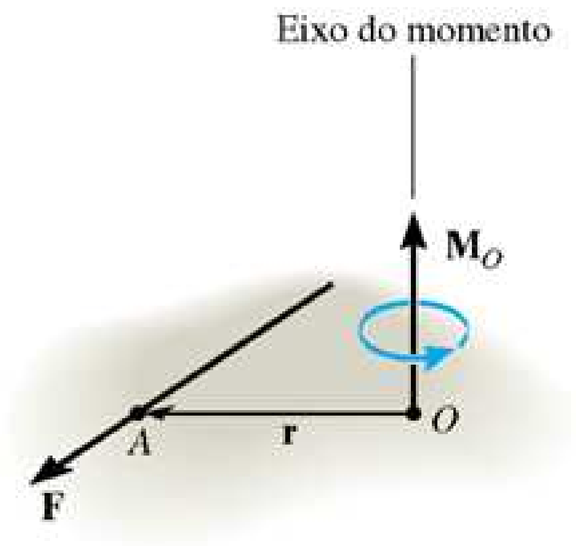
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -(A_x B_z - A_z B_x)\, j$$

- Para o elemento k:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_x B_y - A_y B_x)\, k$$

Momento de uma Força

- Formulação Vetorial
- $M_0 = \boldsymbol{r} \times \mathbf{F}$
- Sendo ***r*** um vetor posição traçado de 0 até qualquer ponto sobre a linha de ação de F.



(a)

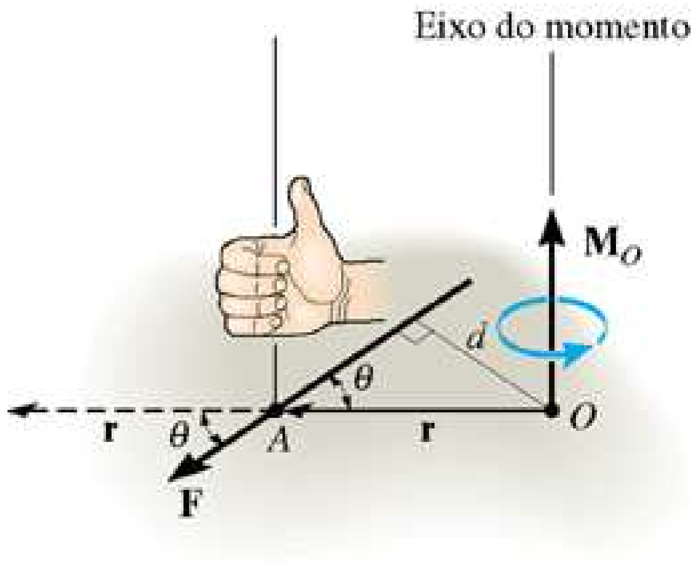
Momento de uma Força

- A Intensidade do produto vetorial é definida por:
  - $M_0 = \boldsymbol{r} \times F.\ \boldsymbol{sen\theta}$

- O ângulo θ é medido entre as direções de ***r*** e **F**.

- Uma vez que o braço de momento **d = *r.sen*$\boldsymbol{\theta}$**, então:

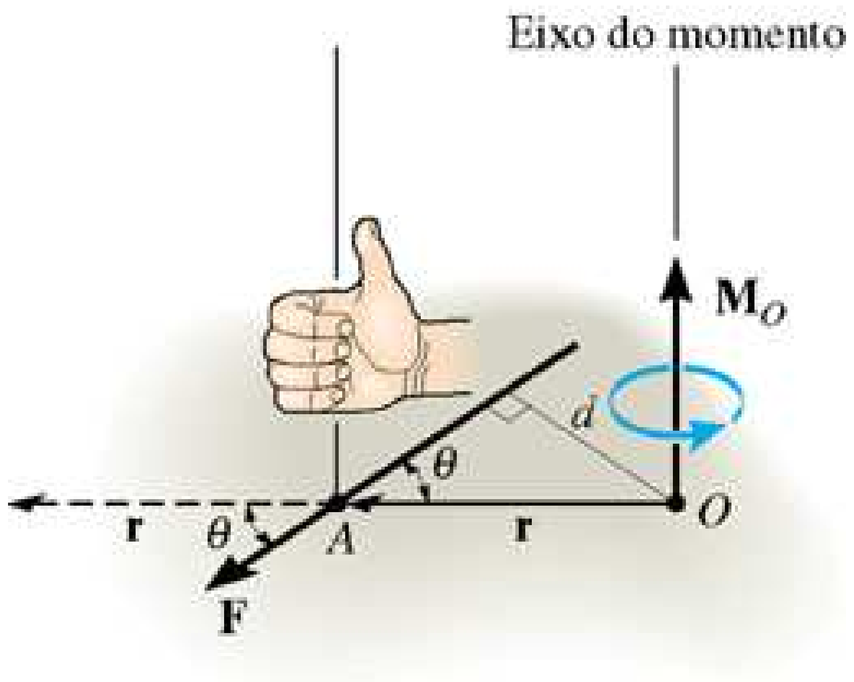
- $M_0 = \boldsymbol{r} \times F\ \boldsymbol{sen\theta} = (\boldsymbol{r.sen\theta}).\ F = d\ .\ F$



(b)

Momento de uma Força

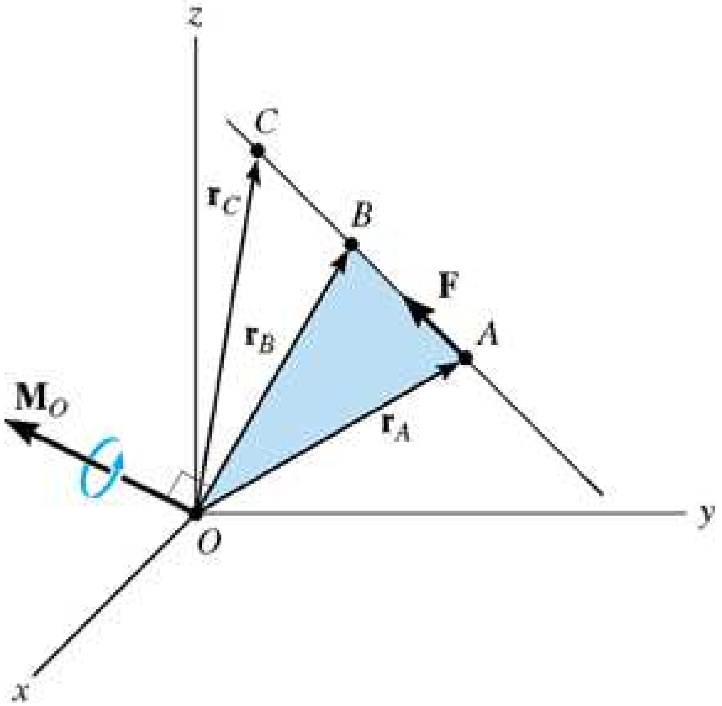
- Direção e sentido : São determinados pela regra da mão direita, com aplicação do produto vetorial.



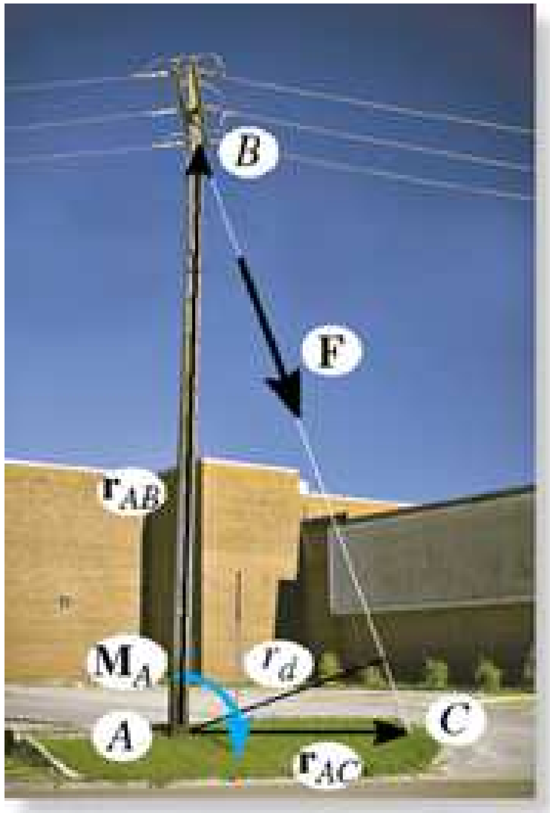
(b)

Momento de uma Força

- **Princípios da Transmissibilidade:** O vetor ***F*** pode agir sobre qualquer ponto da sua linha de ação; e o vetor posição ***r***, pode ser aplicado em qualquer ponto pertencente a linha de ação de ***F***, dessa forma:



- **M_0 = rb x F = rc x F**



Momento de uma Força

- Desenvolvendo a equação,

  - **M0 = rb x F = rc x F**, teremos:

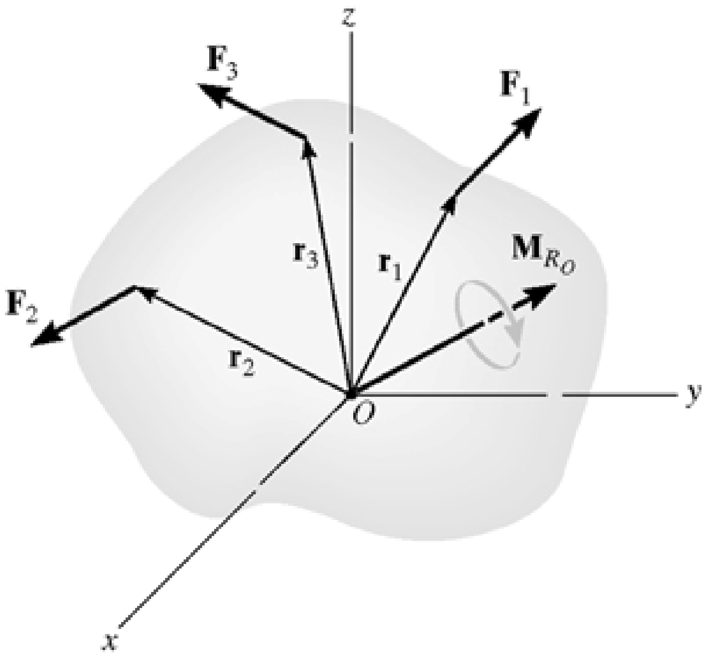
$$M_0 = r \times F = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ r_x & \mathrm{r_y} & \mathrm{r_z} \\ F_x & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z} \end{vmatrix}$$

- r_x, r_y r_z são os componentes x, y, z dos vetores posição traçado do ponto 0 até qualquer ponto sobre a linha de ação da força.
- F_x, F_y F_z representam os componentes x, y, z do vetor força.

- **M0 = ($r_y F_z$ - $r_z F_y$)i – ($r_x F_z$ - $r_z F_x$)j + ($r_x F_y$ - $r_y F_x$)k**

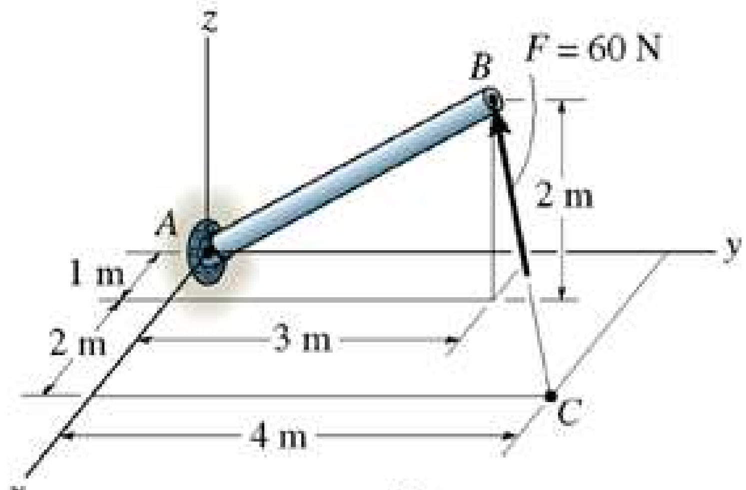
Momento de uma Força

- **Momento resultante de um sistema de forças**:
  - Se um corpo está sujeito à ação de um sistema de forças, o momento resultante das forças em relação ao ponto 0 pode ser determinado pela soma vetorial dos momentos gerados por esse sistema.

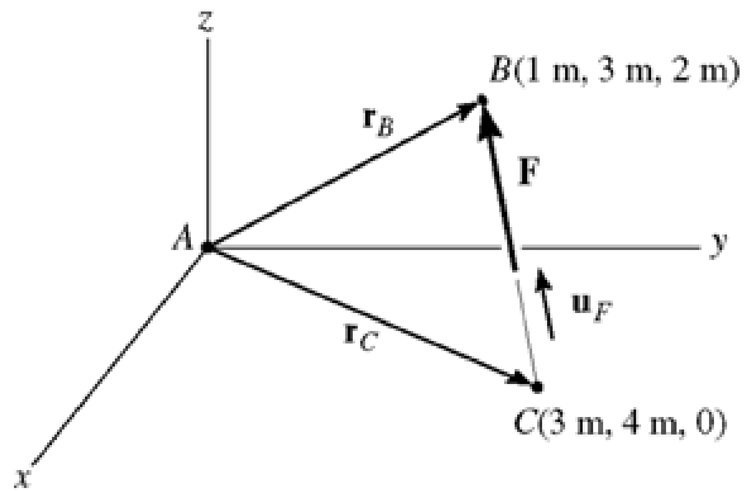


Exercícios

- O poste está sujeito a uma força de 60 N na direção C para B. Determine a intensidade do momento criado pela força em relação ao suporte em A.



(a)



(b)

Solução

- Pelo princípio da transmissibilidade:

$$M_A = r_B \times F$$
$$ou$$
$$M_A = r_C \times F$$

- Os vetores posição são representados como:

$$r_B = \{1i + 3j + 2k\}m$$
$$e$$
$$r_C = \{3i + 4j\}m$$

- A direção e o sentido da intensidade da força são especificados pelo vetor unitário $\boldsymbol{u}_F$ de C para B:

$$F = (60N) \cdot u_F = 60 \cdot \left[\frac{(1-3)i + (3-4)j + (2-0)k}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} \right]$$
$$F = \{-40i - 20j + 40k\}$$

Solução

- Convertendo para a forma matricial:

$$M_A = r_B \times F = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$

ou

$$M_A = r_C \times F = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$

Em ambos os casos:

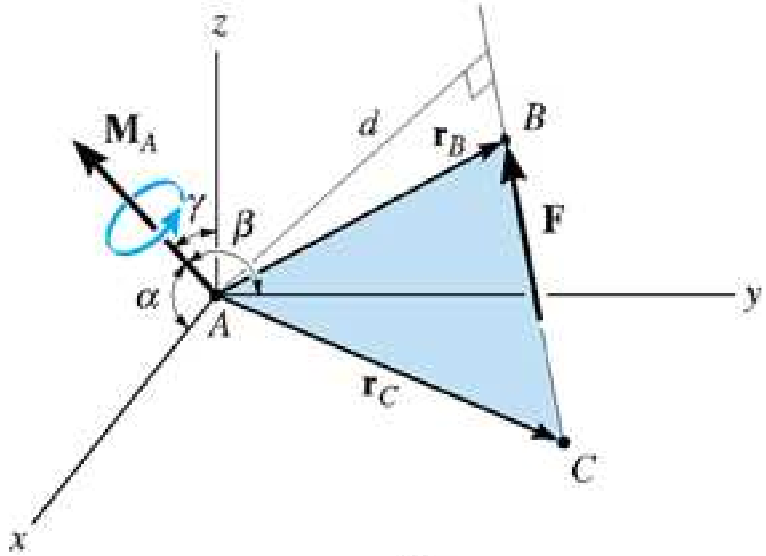
$$M_A = \{160i - 120j + 100k\}$$

Intensidade:

$$M_A = \sqrt{(160)^2 + (-120)^2 + (100)^2}$$

$$M_A = 224 N \cdot m$$

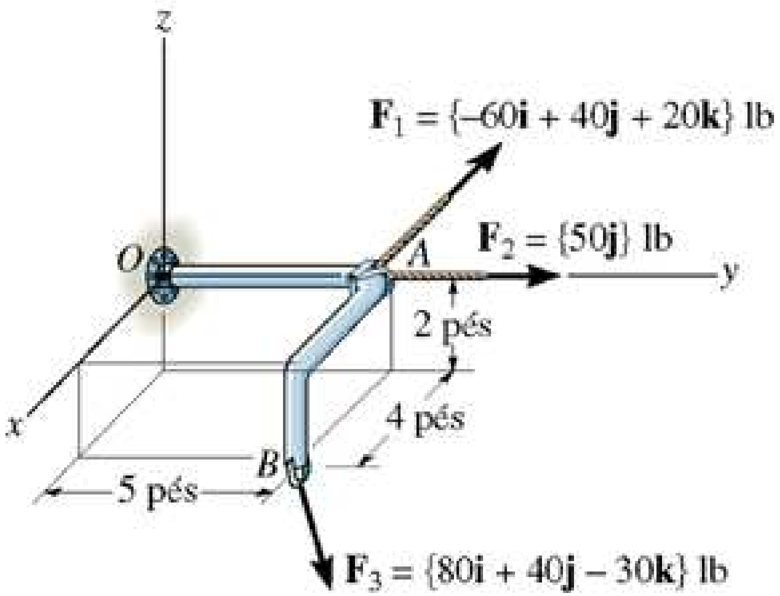
Calcule os ângulos diretores:



(c)

Exercícios

- Três forças atuam na Barra mostrada, determine o momento resultante criado pelas forças em relação à flange em 0 e os ângulos diretores coordenados para o eixo do momento.



(a)

Exercícios

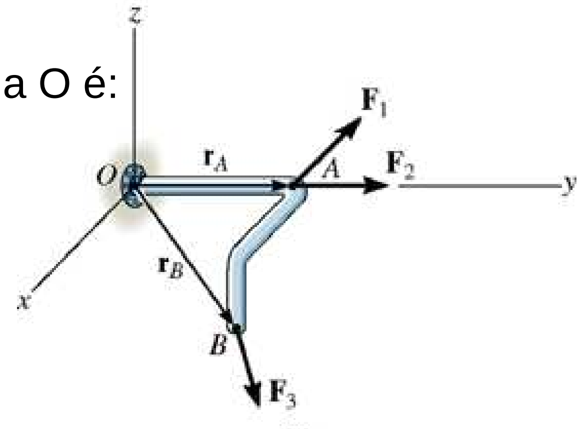
- Solução:
  - Vetores Posição direcionados do ponto O para cada força:

$$r_A = \{5j\} pés$$

$$e$$

$$r_B = \{4i + 5j - 2k\} pés$$

  - Como conseqüência, o momento resultante em relação a O é:



(b)

$$M_{R0} = \sum (r \times F)$$

$$M_{R0} = r_A \times F_1 + r_A \times F_2 + r_B \times F_3$$

$$M_{R0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

Exercícios

- Solução:

$$M_{R0} = \{30i - 40j + 60k\} lb \cdot pé$$

  - Intensidade do momento:

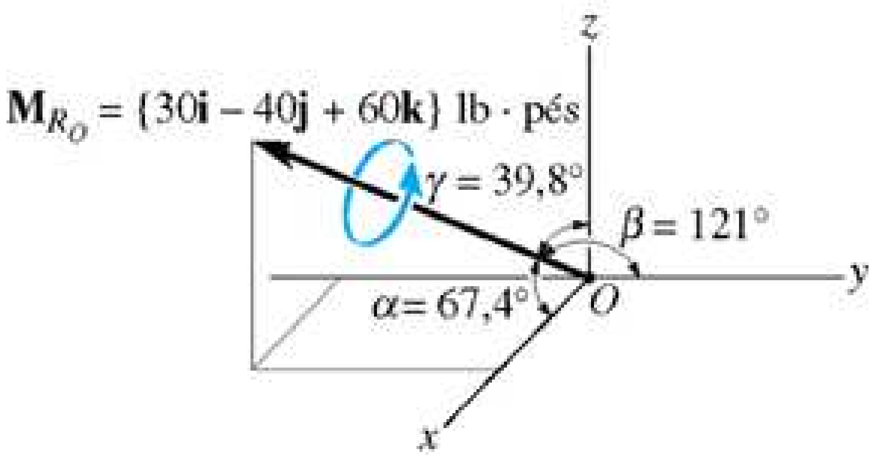
$$M_{R0} = \sqrt{(30)^2 + (-40)^2 + (60)^2}$$

$$M_{R0} = 78{,}10 lb \cdot pés$$

  - Vetor unitário:

$$u = \frac{M_{R0}}{M_{R0}} = \frac{30i - 40j + 60k}{78{,}10}$$

$$u = 0{,}3841i - 0{,}5121j + 0{,}7682k$$



(c)

  - Ângulos diretores coordenados:

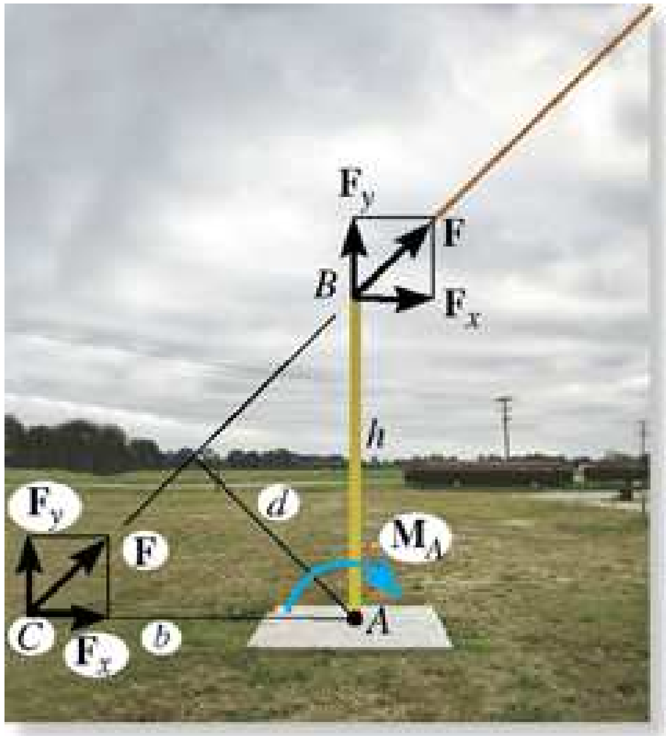
$$\cos\alpha = 0{,}3841$$

$$\cos\beta = -0{,}5121$$

$$\cos\gamma = 0{,}7682$$

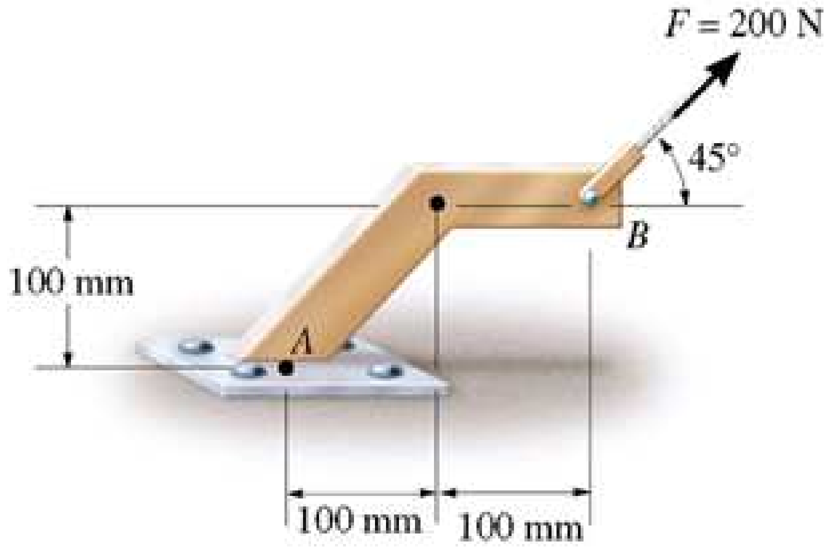
Princípios dos Momentos

- Teorema de Varignon: O momento de uma força em relação a um ponto é igual a soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto.



Exercício

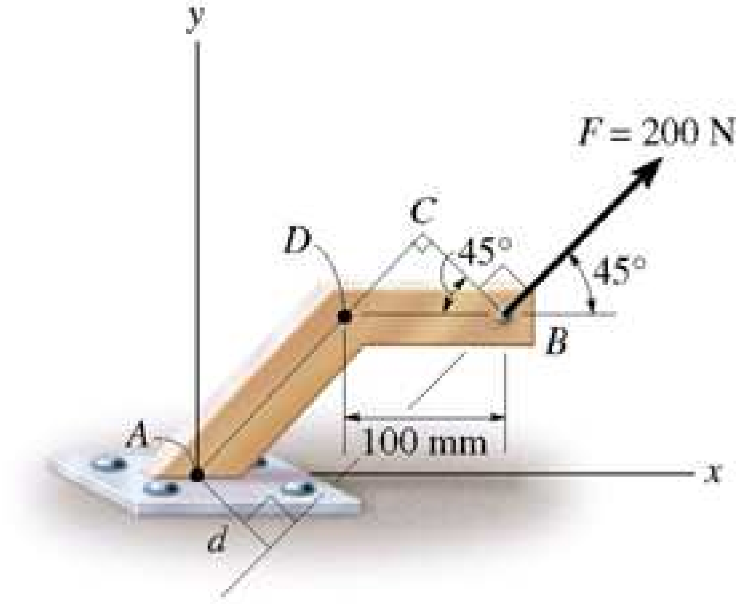
- Uma força de 200 N atua sobre o suporte abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto A.



(a)

Exercício

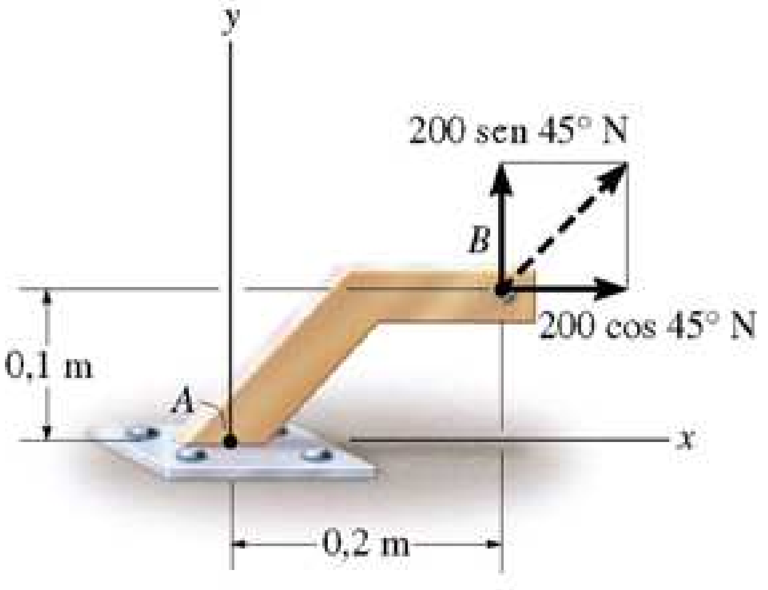
- Solução 1.



(b)

Exercício

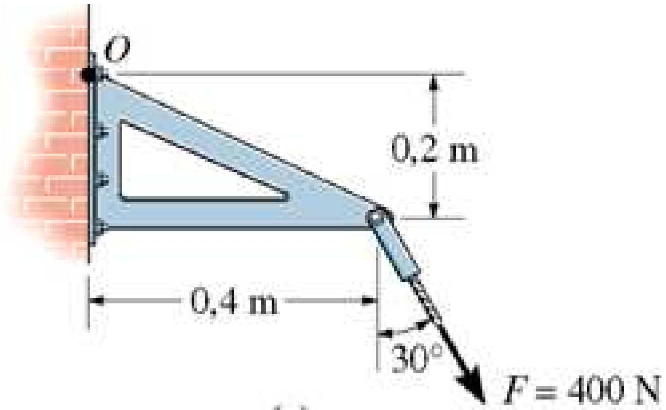
- Solução 2



(c)

Exercicio

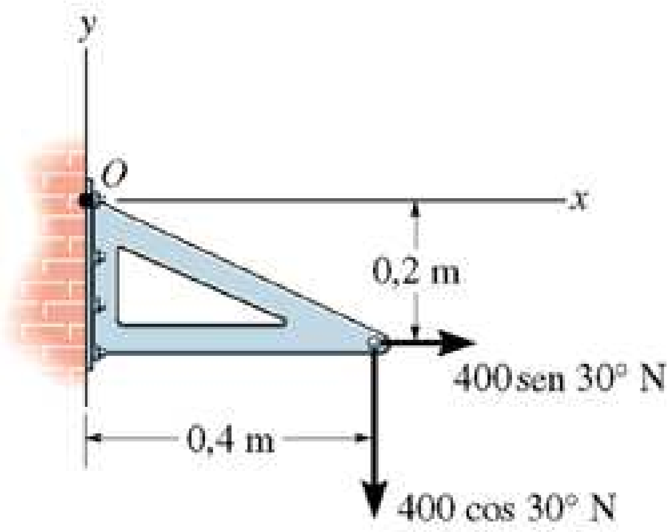
- A força F é aplicada nos terminais de cada suporte em ângulo mostrado na figura. Determine o momento da força em relação ao ponto 0.



(a)

Exercicio

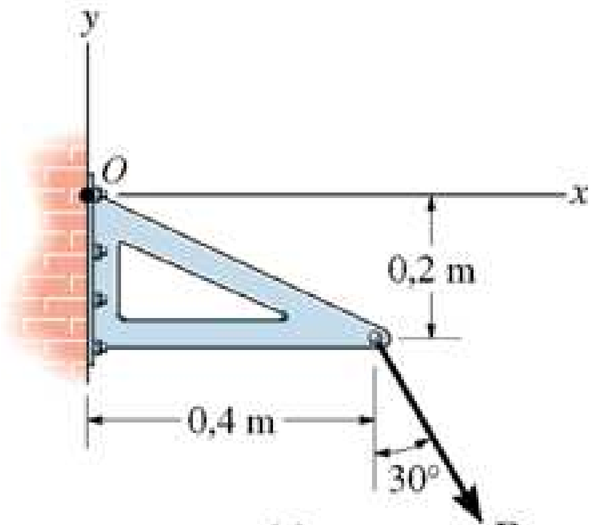
- Solução 1 (Análise Escalar).



(b)

Exercicio

- Solução 2 (Análise Vetorial).



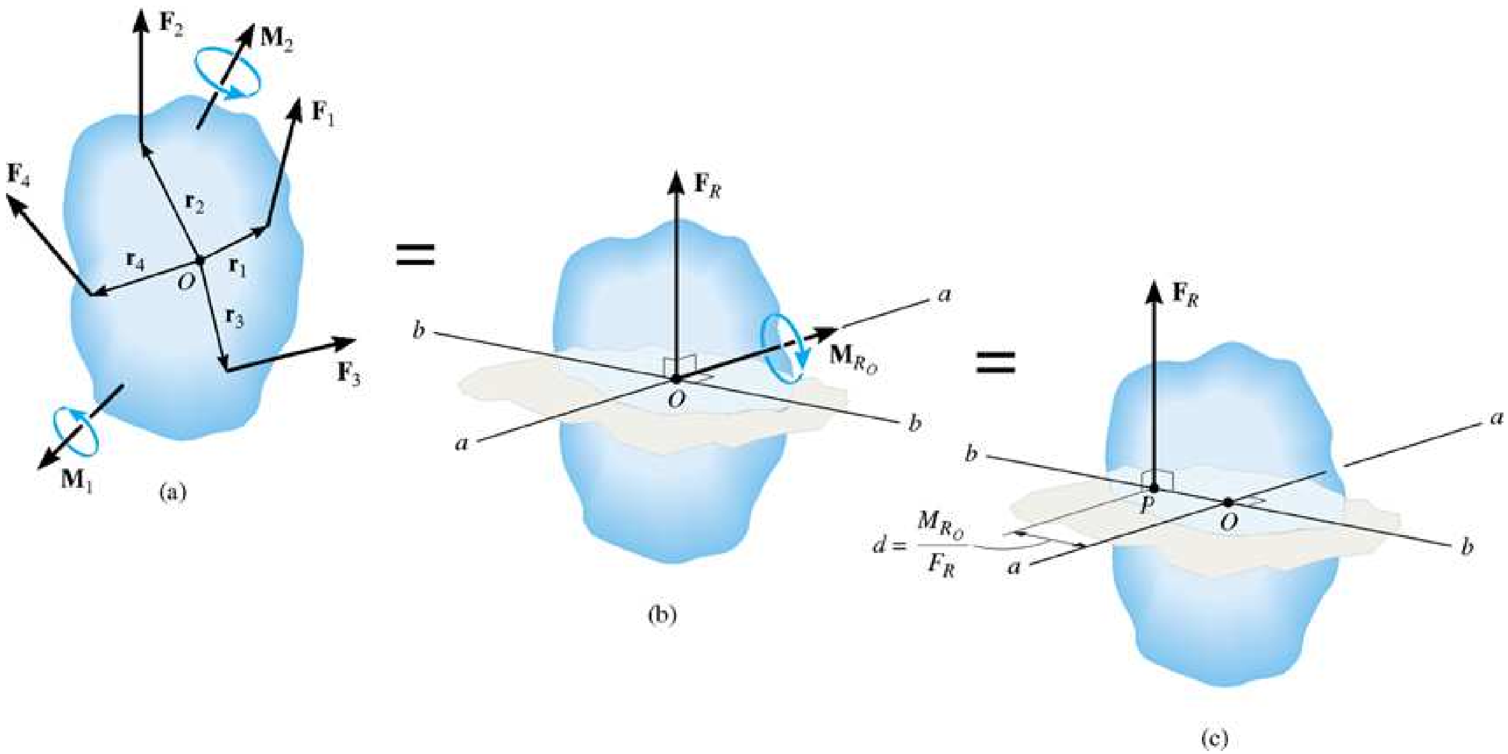
(c)

Sistemas de Forças e Momentos

Marcio Varela

Análise do Sistema Força

- **Somatório dos Momentos**
  - O momento da força resultante em relação ao ponto O é igual à soma de todos os momentos no sistema.



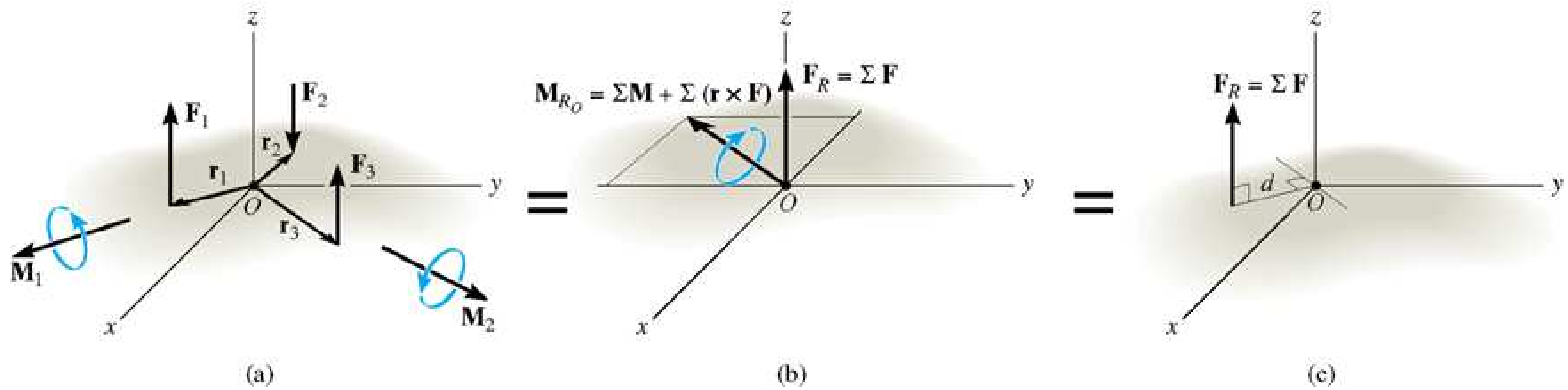
Análise do Sistema Força

- **Formulação**

$$FRx = \Sigma F_x$$

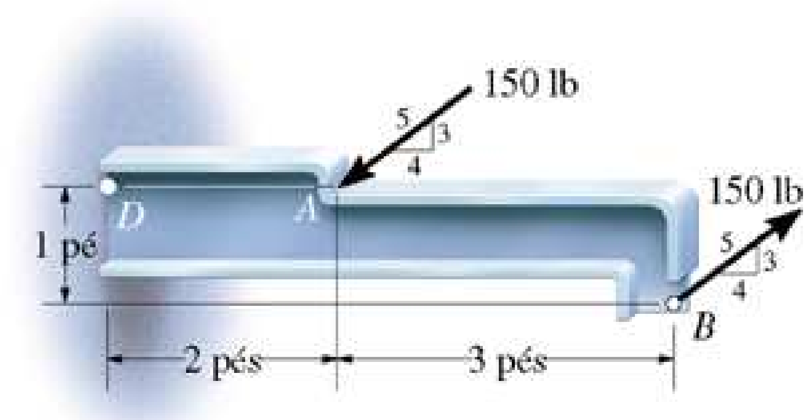
$$FRy = \Sigma F_y$$

$$M_{Ro} = \Sigma M_x + \Sigma M_y + \Sigma M_z$$

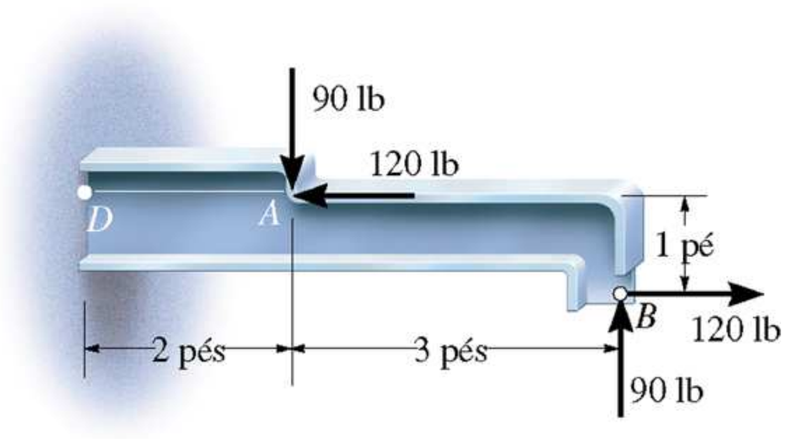


Análise do Sistema Força

- Exercícios
  - Determine o momento de binário que age no elemento mostrado na figura abaixo (análise escalar).



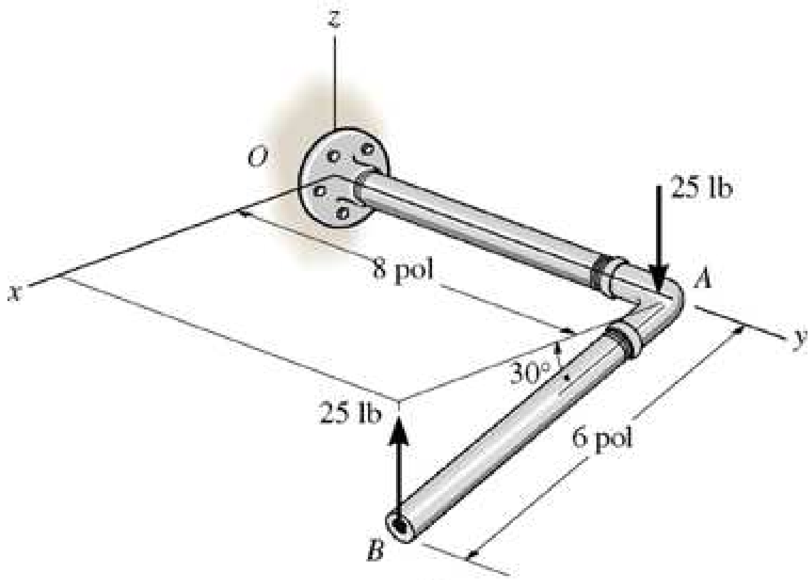
(a)



(b)

Análise do Sistema Força

- Exercícios
  - Determine o momento de binário que atua sobre a estrutura de tubos mostrada na figura abaixo.



(a)

Análise do Sistema Força

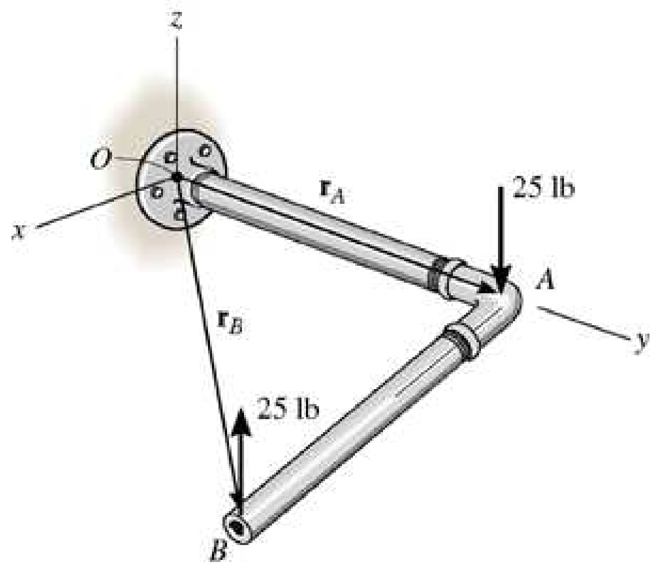
- Análise Vetorial

$$M = r_A \times (-25k) + r_B \times (25k)$$

$$M = (8j) \times (-25k) + (6 \cdot \cos 30^0 i + 8j - 6 \cdot sen30^0 k) \times (25k)$$

$$M = -200i - 129{,}9j + 200i$$

$$M = \{-129{,}9j\} lb \cdot pol$$



(b)

Análise do Sistema Força

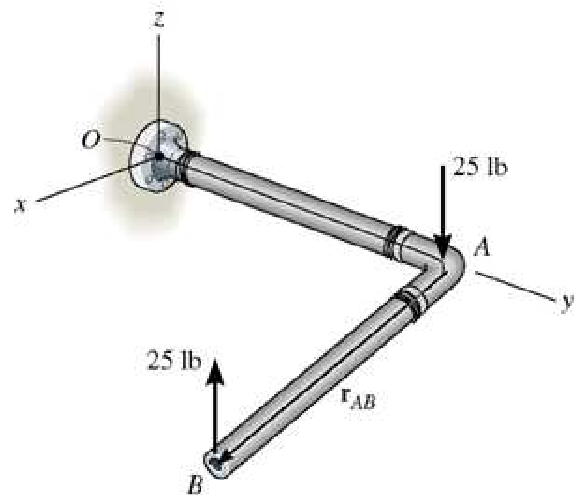
- Análise Escalar

$$M = F \cdot d$$

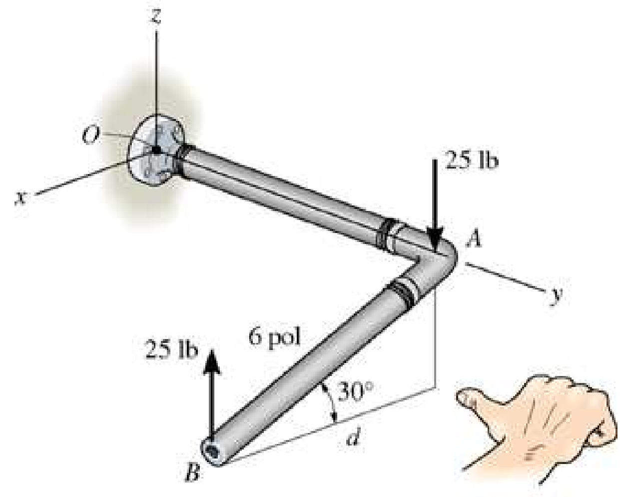
$$M = 25 \cdot 6 \cdot \cos 30^0$$

$$M = 25 \cdot 5{,}20$$

$$M = -129{,}9 lb \cdot pol$$



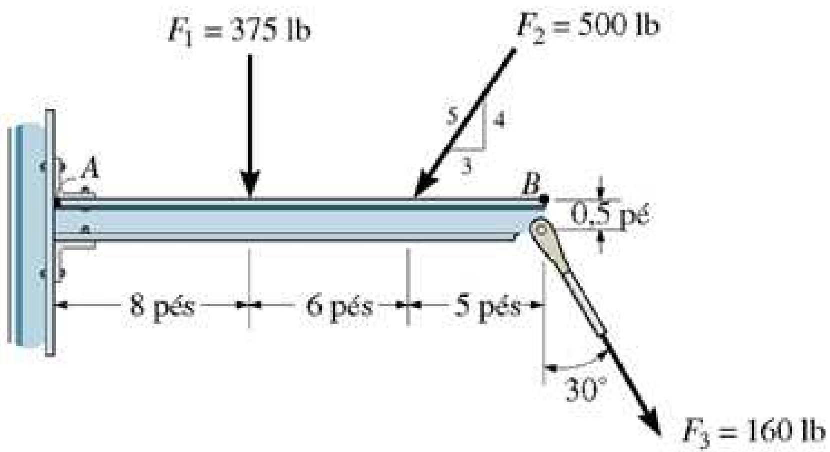
(c)



(d)

Análise do Sistema Força

- Exercícios
  - Determine o momento em relação ao ponto B de cada uma das três forças agindo sobre a viga e o momento resultante (análise escalar).



Análise do Sistema Força

- Exercícios
  - Usando a análise vetorial cartesiana determine a força resultante e o momento resultante das três forças em relação à base da coluna em A. Dado F1 = {400i + 300j + 120K}N.

$$F_R = \sum F_i$$

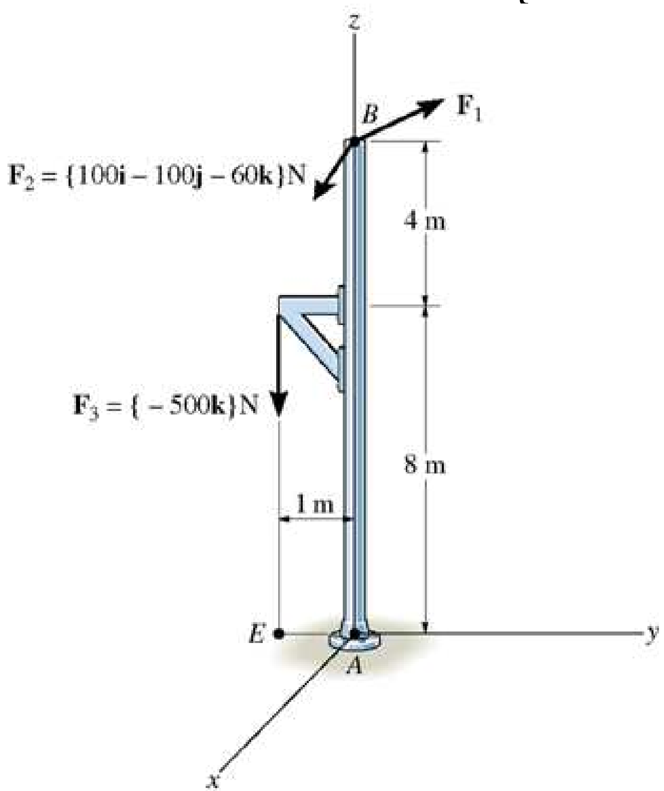
$$F_R = \{(400+100)i + (300-100)j + (+120-60-500)k\}$$

$$F_R = \{500i + 200j - 440k\}N$$

$$M_{RA} = \sum (r \times F)$$

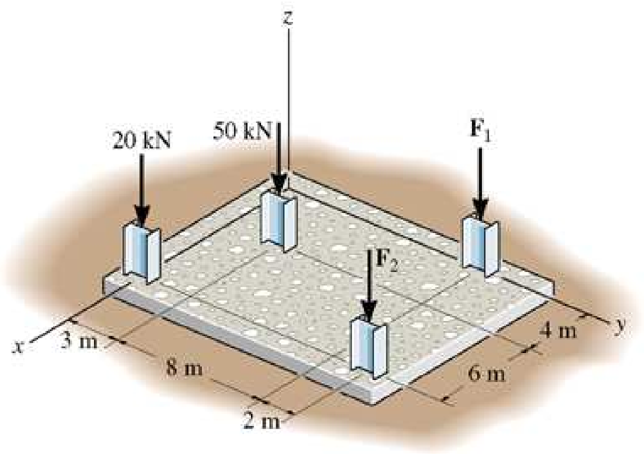
$$M_{RA} = r_{AB} \times F_1 + r_{AB} \times F_2 + r_{AE} \times F_3$$

$$M_{R0} = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 400 & 300 & 120 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 100 & -100 & -60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix}$$



Análise do Sistema Força

- 1 – A laje da figura está submetida a quatro colunas paralelas com cargas. Determine a força resultante equivalente e especifique a sua posição (x, y) sobre a laje. Considere F1 = 30 kN e F2 = 40 kN.



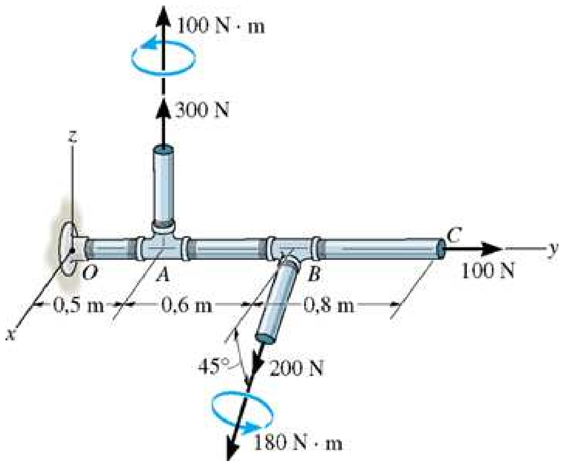
$$(+)\uparrow F_R = \Sigma F_y;$$
$$-30-50-40-20=-140kN$$
$$F_R = 140kN \downarrow$$

$$(M_R)_x = \Sigma M_x$$
$$-140\cdot y = -50\cdot 3 - 30\cdot 11 - 40\cdot 13$$
$$y = 7{,}14m$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y$$
$$140\cdot x = 50\cdot 4 + 20\cdot 10 + 40\cdot 10$$
$$y = 5{,}71m$$

Análise do Sistema Força

- 2 – Substitua as forças e todos os momentos por uma força e um momento equivalentes no ponto O. Levar, também, em consideração os momentos causados pelas forças no ponto em questão. **Usar notação vetorial cartesiana**.



$$F_1 = \{300k\}N$$
$$F_2 = 200\{\cos 45^o\, i - \sin 45^o\, k\}N$$
$$F_2 = \{141{,}42i - 141{,}42k\}N$$
$$F_3 = \{100\, j\}N$$

$$M_1 = \{100k\}N \cdot m$$
$$M_2 = 180\{\cos 45^o\, i - \sin 45^o\, k\}N \cdot m$$
$$M_2 = \{127{,}28i - 127{,}28k\}N \cdot m$$

$$F_R = \Sigma F;$$
$$F_R = F_1 + F_2 + F_3$$
$$F_R = 141{,}42i + 100\, j + (300k - 141{,}42k)$$
$$F_R = \{141{,}42i + 100\, j + 159k\}N$$

$$M_{RO} = \Sigma M_O$$
$$M_{RO} = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + M1 + M2$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1{,}1 & 0 \\ 141{,}42 & 0 & -141{,}42 \end{vmatrix} + 100k + 127{,}28i - 127{,}28k$$

$$M_{RO} = \{122i - 183k\}N \cdot m$$

Introdução a Isostática

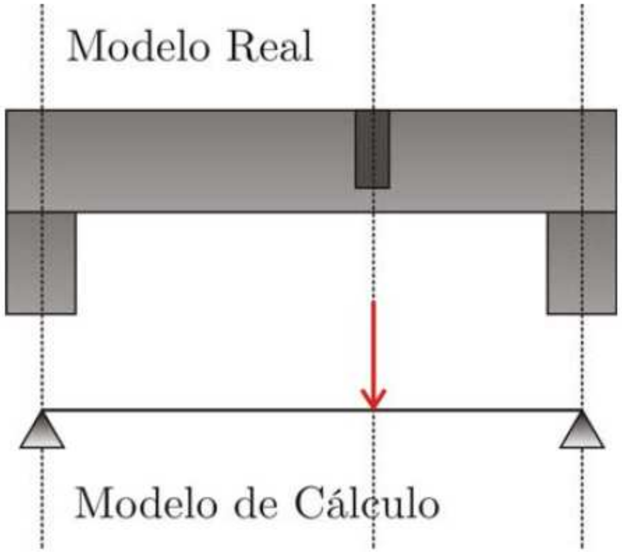
Tipos de carregamentos e de apoio

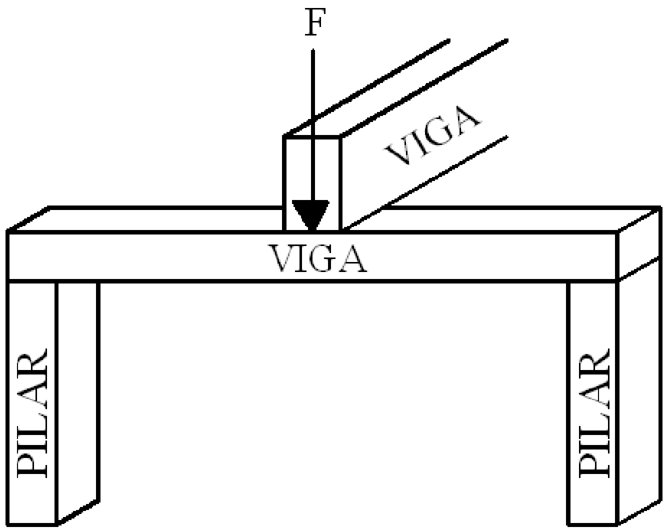
Tipos de carregamentos

- **Carga concentrada**
- **Carga distribuída**
  - Uniforme
  - Triangular
  - Trapezoidal
- **Carga momento**

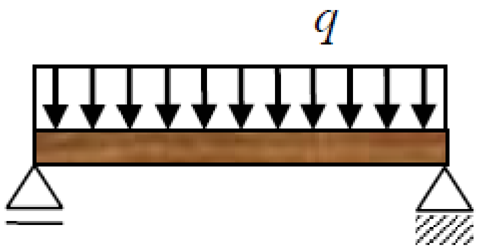
Cargas concentradas

Uma forma aproximada de tratar cargas distribuídas segundo áreas muito reduzidas (em presença das dimensões da estrutura). São representadas por cargas aplicadas pontualmente.

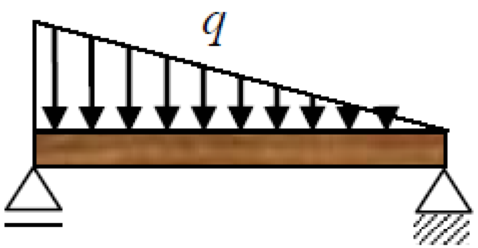




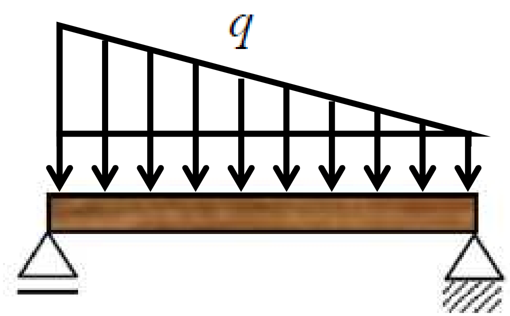
Cargas distribuídas



Carga uniformemente distribuída

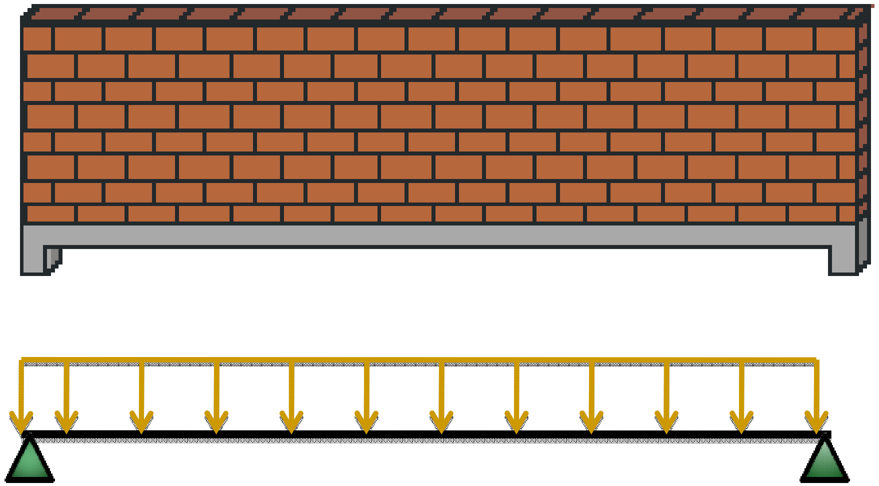


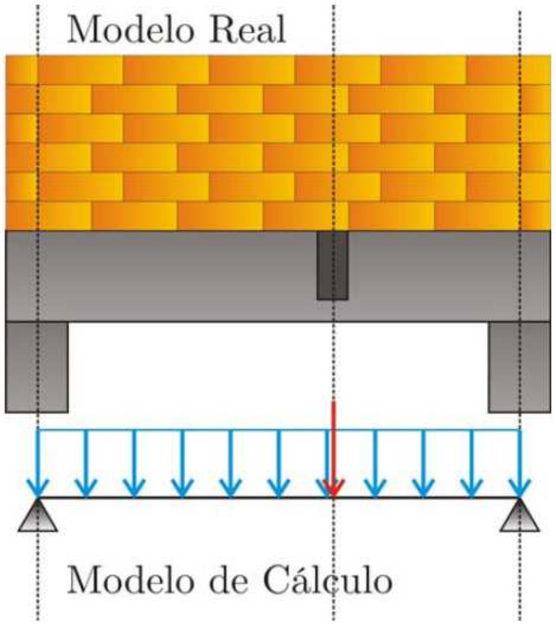
Carga triangular



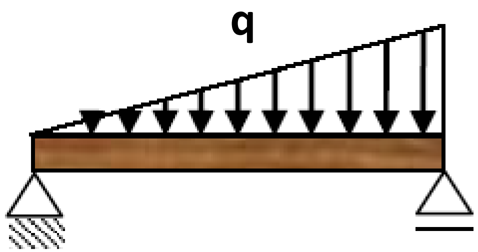
Carga trapezoidal

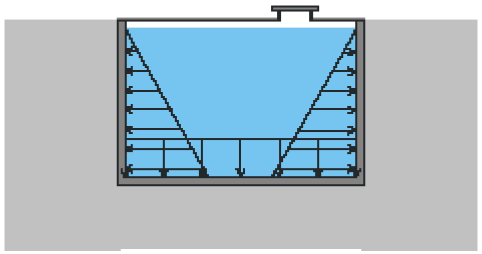
Carga uniformemente distribuída

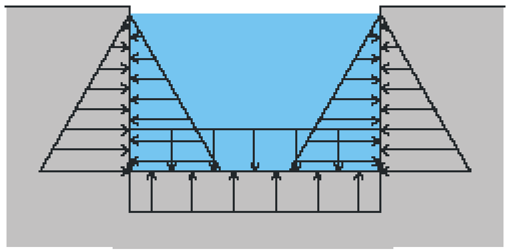




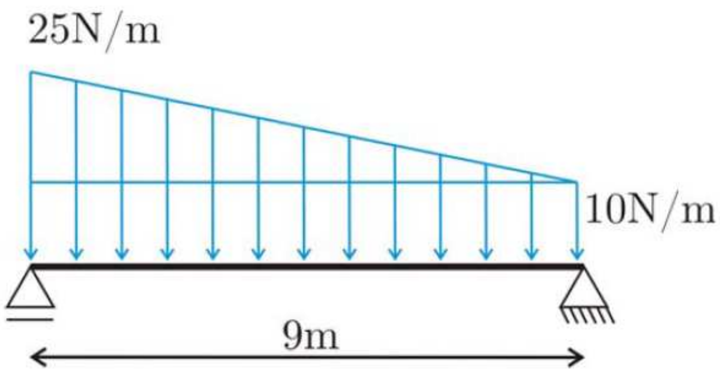
Carga triangular

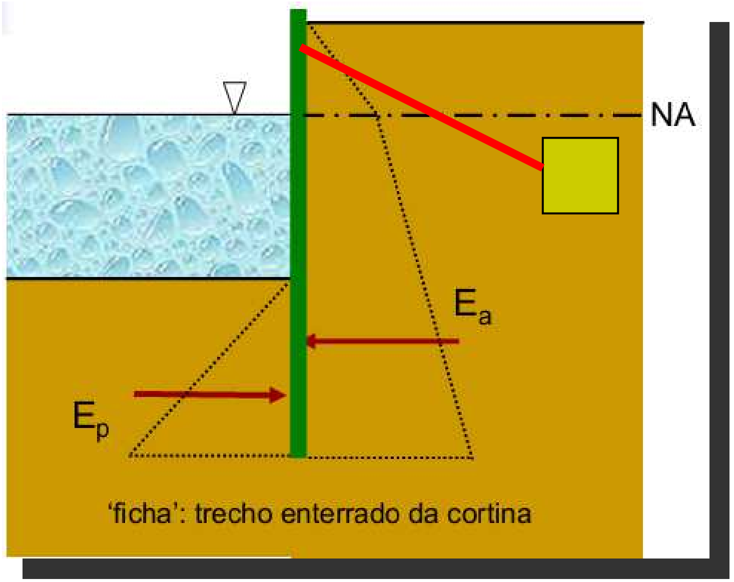






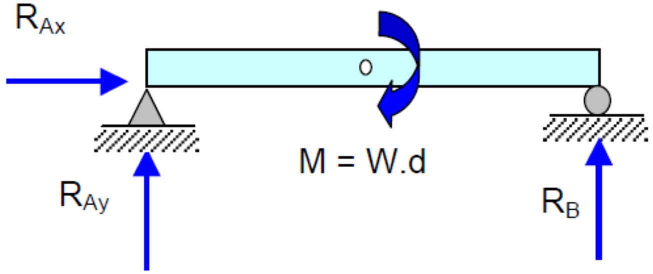
Carga trapezoidal





Cargas momento

São cargas do tipo momento fletor (ou torsor) aplicadas em um ponto qualquer da estrutura.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA NATAL

Aparelhos de Apoios

- Restringe o grau de liberdade das estruturas;
- Provoca reações nas direções dos movimentos;
- Liga elementos que compões a estrutura;
- Função estática de transmitir as cargas ou forças.

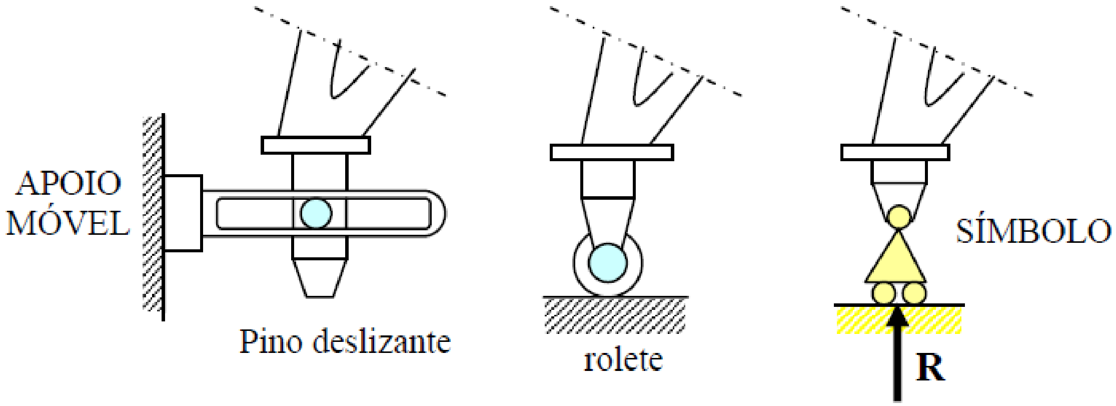
Tipos de Apoios

Os vínculos ou apoios são classificados em função de número de movimentos impedidos.

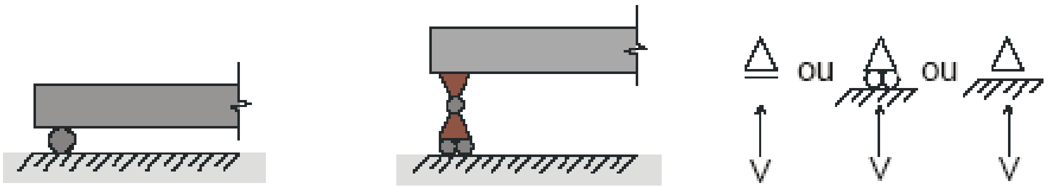
- **Apoio do 1º gênero (apoio simples);**
- **Apoio do 2º gênero (rótula);**
- **Apoio do 3º gênero (engaste).**

Apoio do 1º gênero

São aqueles que impedem deslocamento somente em uma direção.



SIMBOLOGIA:



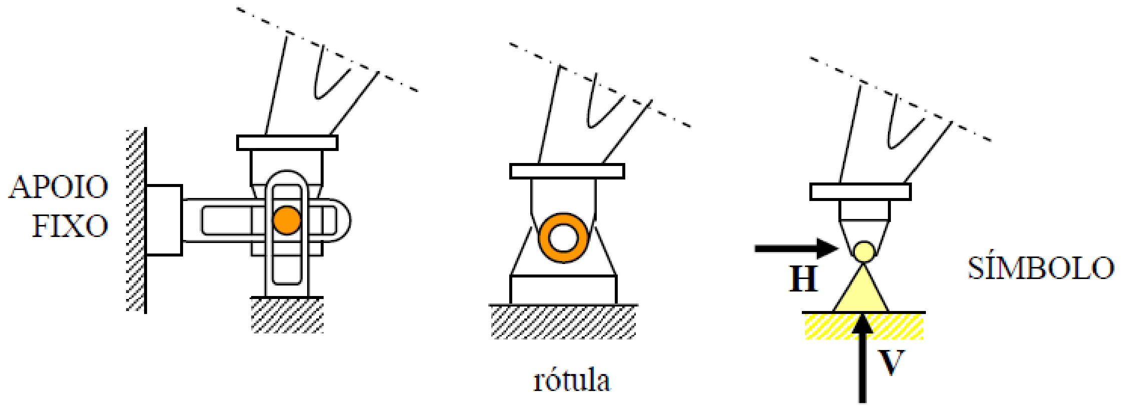
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
NATAL

Apoio do 1º gênero

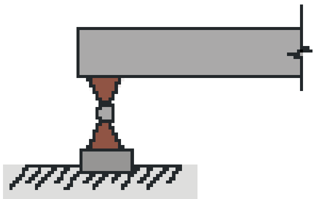
Ponte rainha d. Amélia

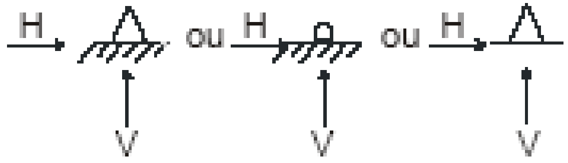
Apoio do 2º gênero

São aqueles que restringem a translação de um corpo livre em todas as direções.



SIMBOLOGIA:





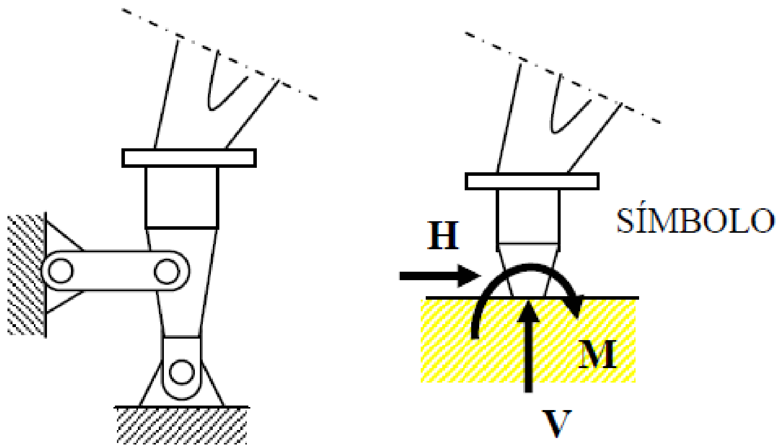
Apoio do 2º gênero

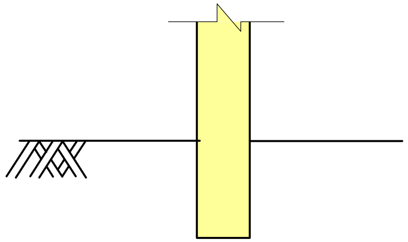
Estação ferroviária em Londres

Apoio do 3º gênero

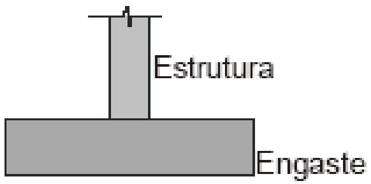
São aqueles que impedem qualquer movimento de corpo livre, imobilizando-o completamente.

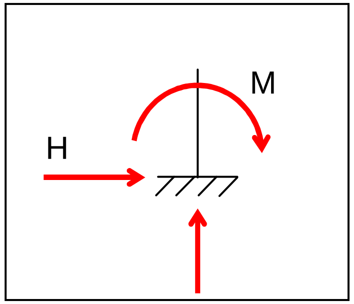
ENGASTE



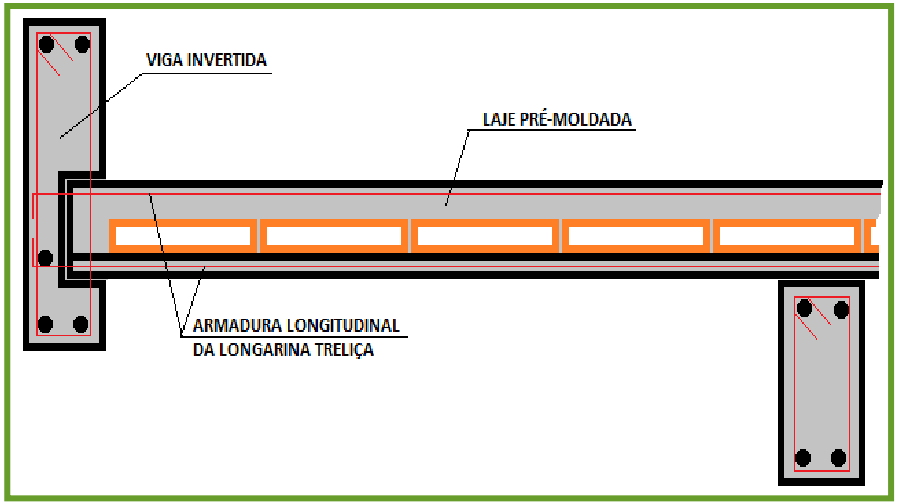


SIMBOLOGIA:

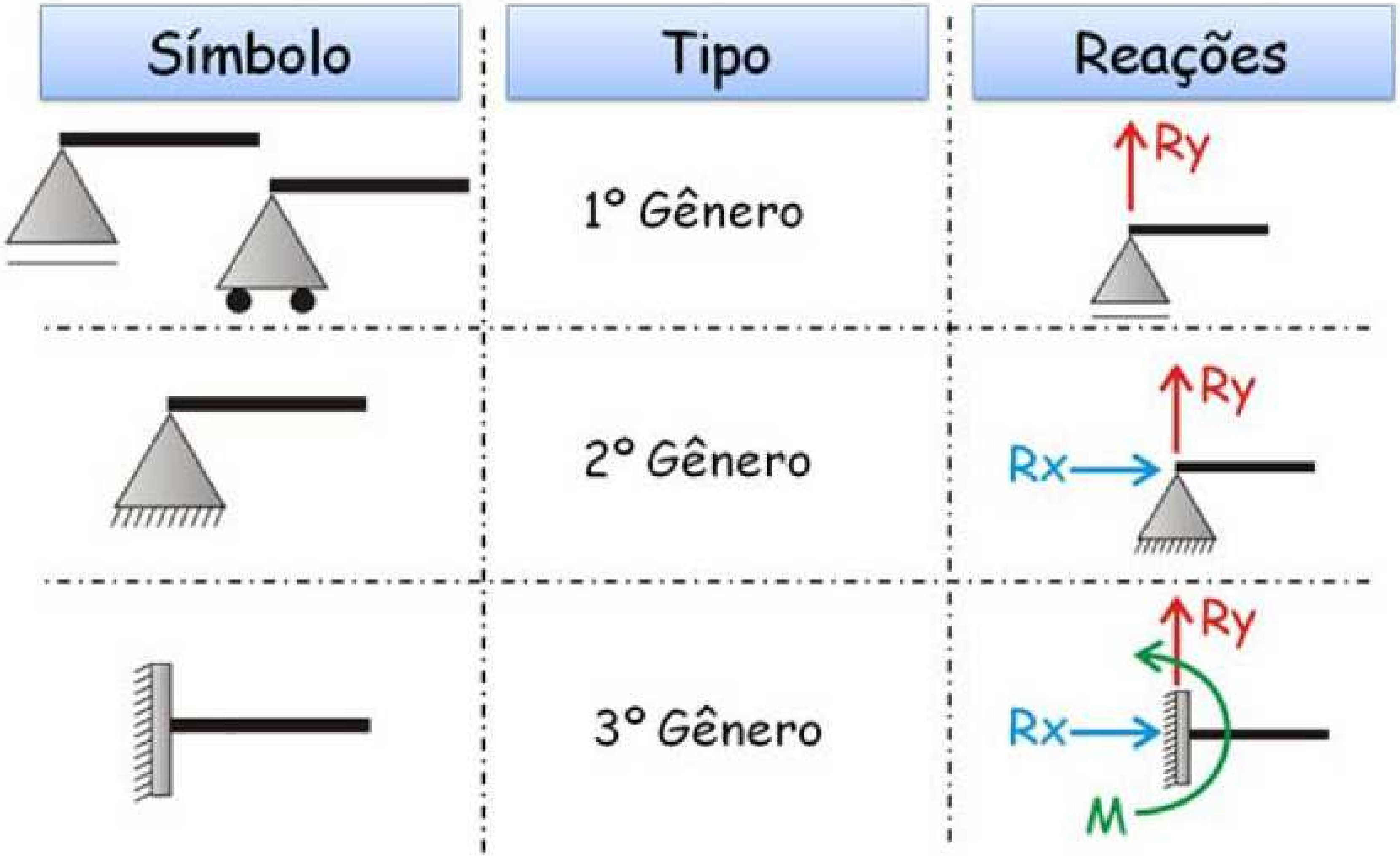




Apoio do 3º gênero



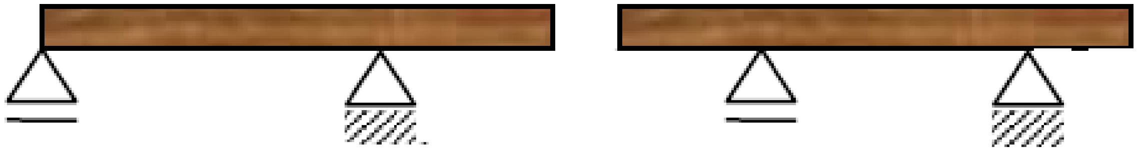
Tipos de apoio



Tipos de Estruturas

Vigas

Biapoiada

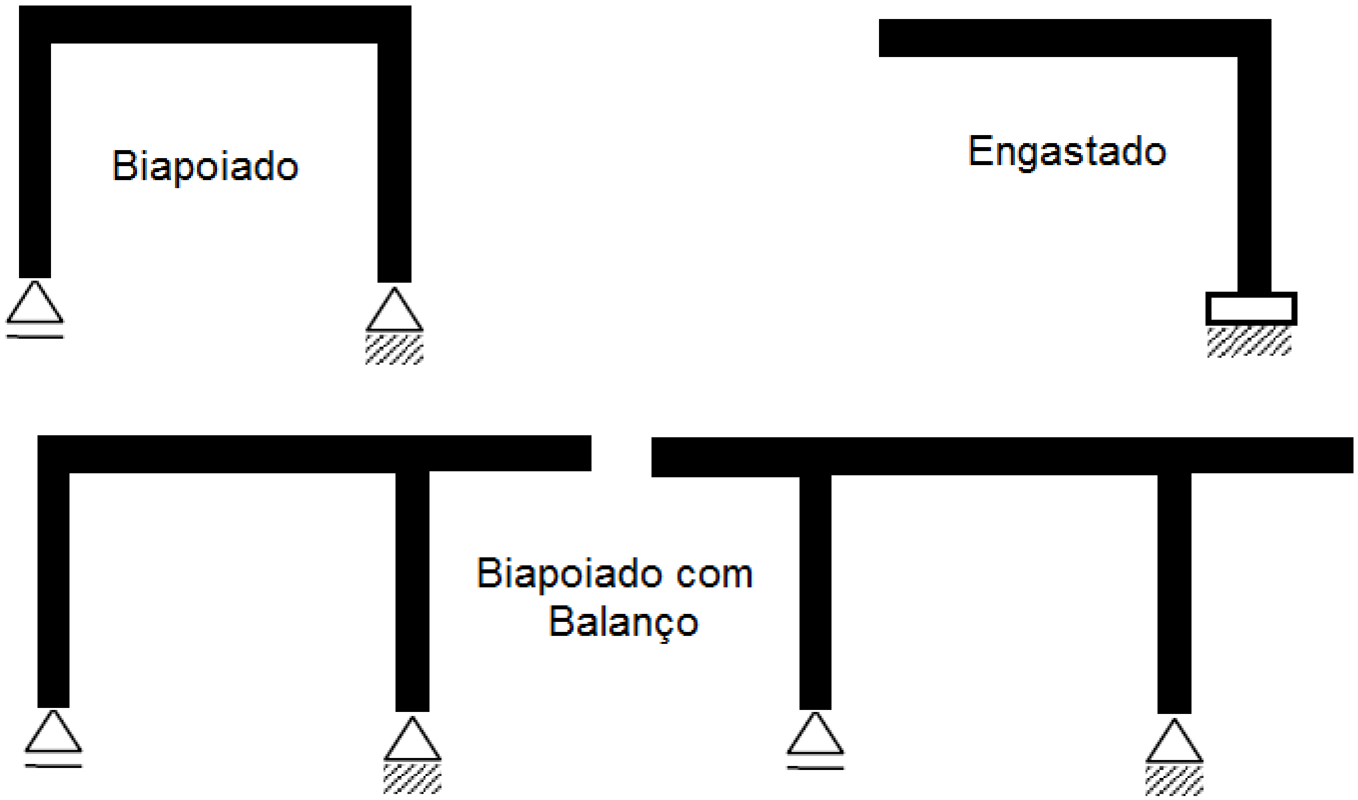


Biapoiada com balanço

Engastada

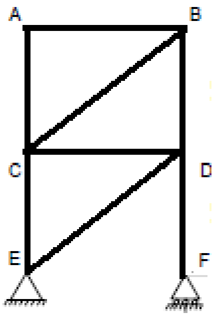
Tipos de Estruturas

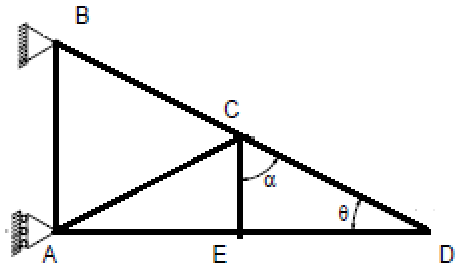
Pórticos

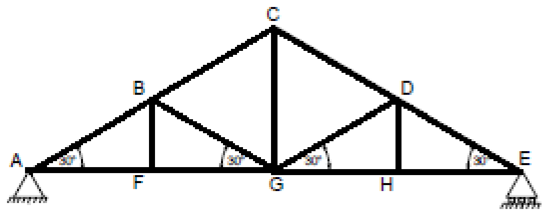


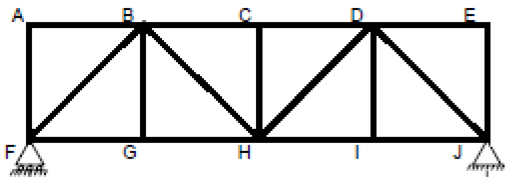
Tipos de Estruturas

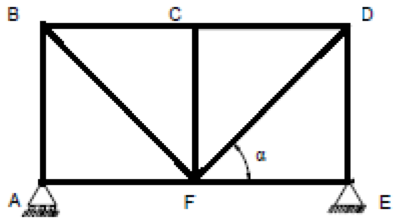
Treliça

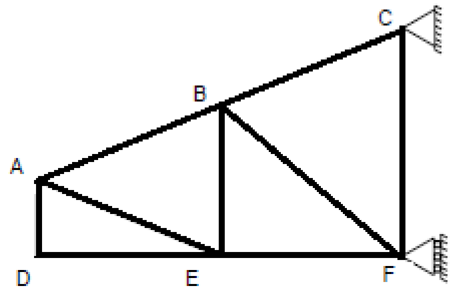












Exercício de fixação

- De acordo com o que foi visto anteriormente, calcule as reações de apoio das vigas abaixo: