Juliana Schivani

Matemática Financeira

Matemática Financeira

Juliana Schivani

Matemática Financeira

INSTITUTO TECNOLÓGICO BRASILEIRO

Natal/RN
2014

INSTITUTO TECNOLÓGICO BRASILEIRO

presidente
PROF. PAULO DE PAULA

diretor geral
PROF. EDUARDO BENEVIDES

diretora acadêmica
PROFA. LEIDEANA BACURAU

diretora de produção de projeto
PROFA. JUREMA DANTAS

FICHA TÉCNICA

gestão de produção de materiais didáticos
PROFA. LEIDEANA BACURAU

coordenação de design instrucional
PROFA. ANDRÉA CÉSAR PEDROSA

projeto gráfico
ADAUTO HARLEY SILVA

diagramação
MAURIFRAN GALVÃO

designer instrucional
WANNYEMBERG KLAYBIN DA SILVA DANTAS

revisão de língua portuguesa
PROFA. ANA AMÉLIA AGRA LOPES

revisão das normas da ABNT
LUÍS CAVALCANTE FONSECA JÚNIOR

ilustração
RAFAEL EUFRÁSIO DE OLIVEIRA

Catalogação da Publicação na Fonte (CIP).
Ficha Catalográfica elaborada por Luís Cavalcante Fonseca Júnior - CRB 15/726.

S329m Schivani, Juliana.
Matemática financeira / Juliana Maria Schivani Alves ; edição e revisão do Instituto Tecnológico Brasileiro (ITB). – Natal, RN : 2014.
140 p. : il.

ISBN 978-85-68100-37-0
Inclui referências

1. Matemática financeira. 2. Cálculos financeiros. 3. Desenvolvimento financeiro. I. Instituto Tecnológico Brasileiro. II.Título.

RN/ITB/LCFJ CDU 51

“O caminho entre a pureza original da matemática e sua aplicação é uma estrada não pavimentada. Seguramente, no instante em que um indivíduo consegue transformar o seu conhecimento matemático em algo aplicável, ele estará educado matematicamente e a pavimentação terá começado.”

(Nelson Hein e Maria Salett Biembengut)

Índice iconográfico


Atividade

Vocabulário


Importante


Mídias


Curiosidade


Querendo mais


Você conhece?


Internet


Diálogos

O material didático do Sistema de Aprendizado **itb** propõe ao aluno uma linguagem objetiva, simples e interativa. Deseja “conversar” diretamente, dialogar e interagir, garantir o suporte para o estudante percorrer os passos necessários a sua aprendizagem. Os ícones são disponibilizados como ferramentas de apoio que direcionam o foco, identificando o tipo de atividade ou material de estudo. Observe-os na descrição a seguir:

Curiosidade – Texto para além da aula, explorando um assunto abordado. São pitadas de conhecimento a mais que o professor pode proporcionar ao aluno.

Importante! – Destaque dado a uma parte do conteúdo ou a um conceito estudado, que seja considerado muito relevante.

Querendo mais – Indicação de uma leitura fora do material de estudo. Vem ao final da competência, antes do resumo.

Vocabulário – Texto explicativo, normalmente curto, sobre novos termos que são apresentados no decorrer do estudo.

Você conhece? – Foto e biografia de uma personalidade conhecida pelas suas obras relacionadas ao objeto de estudo.

Atividade – Resumo do conteúdo praticado na competência em forma de exercício. Pode ser apresentado ao final ou ao longo do texto.

Mídias – Contém material de estudo auxiliar e sugestões de filmes, entrevistas, artigos, *podcast* e outros, podendo ser de diversas mídias: vídeo, áudio, texto, nuvem.

Internet – Citação de conteúdo exibido na Internet: *sites*, *blogs*, redes sociais.

Diálogos – Convite para discussão de assunto pelo *chat* do ambiente virtual ou redes sociais.

Sumário

Apresentação institucional

O Instituto Tecnológico Brasileiro (**itb**) foi construído a partir do sonho de educadores e empreendedores reconhecidos no cenário educacional pelas suas contribuições no desenvolvimento econômico e social dos Estados em que atuaram, em prol de uma educação de qualidade nos níveis básico e superior, nas modalidades presencial e a distância.

Esta experiência volta-se para a educação profissional, sensível ao cenário de desenvolvimento econômico nacional, que necessita de pessoas devidamente qualificadas para ocuparem vagas de trabalho e garantirem suporte ao contínuo crescimento do setor produtivo da nação.

O Sistema **itb** de Aprendizado Profissional privilegia o desenvolvimento do estudante a partir de competências profissionais requeridas pelo mundo do trabalho. Está direcionado a você, interessado na construção de uma formação técnica que lhe proporcione rapidamente concorrer aos crescentes postos de trabalho.

No Sistema **itb** de Aprendizado Profissional o estudante encontra uma linguagem clara e objetiva, presente no livro didático, nos slides de aula, no Ambiente Virtual de Aprendizagem e nas videoaulas. Neste material didático, um verdadeiro diálogo estimula a leitura, o projeto gráfico permite um estudo com leveza e a iconografia utilizada lembra as modernas comunicações das redes sociais, tão acessadas nos dias atuais.

O **itb** pretende estar com você neste novo percurso de qualificação profissional, contribuindo decisivamente para a ampliação de sua empregabilidade. Por fim, navegue no Sistema **itb**: um estudo prazeroso, prático, interativo e eficiente o conduzirá a um posicionamento profissional diferenciado, permitindo-lhe uma atuação cidadã que contribua para o seu desenvolvimento pessoal e do seu país.

Palavra do professor autor

Olá, seja bem-vindo ao mundo das finanças!

A Matemática Financeira estuda o que acontece com o dinheiro ao longo do tempo. Você pode realizar um empréstimo ou efetuar uma aplicação financeira hoje e, ao longo do tempo, incidirão taxas sob este valor emprestado ou aplicado, de modo que, ao devolvê-lo ou recebê-lo, você terá uma quantia maior do que a inicial. Fazendo uma analogia, você pode comprar um imóvel hoje e querer vendê-lo daqui a alguns anos. O valor mínimo a ser cobrado por este imóvel (para que você tenha um ganho real) segue certas lógicas matemáticas e nunca será o mesmo valor da compra.

Seja você uma pessoa física ou jurídica, todos os dias terá que dar ou receber um troco, efetuar um saque ou depósito, conferir a sua conta bancária etc. O dinheiro está tão presente na sua vida quanto as movimentações de entrada e saída do mesmo.

Compreender os percentuais de taxas envolvidas na cobrança de impostos, encargos e empréstimos, distinguir os tipos de juros e descontos existentes, dentre outros conceitos e cálculos financeiros, é fundamental para ser um bom profissional em qualquer campo de atuação. Caminhando nesta perspectiva é que você irá encontrar, neste livro, conceitos e fórmulas aplicadas ao cotidiano, sempre envolvendo problemáticas da vida real as quais poderá estar inserido. Aproveite ao máximo todo o conteúdo deste livro para adquirir conhecimentos úteis a sua vida profissional e pessoal.

Apresentação das competências

No início de cada competência, você se deparará com uma situação problema que, talvez, você já tenha vivenciado ou, provavelmente, vivenciará. O desfecho desta situação será construído por você à medida que for aprendendo cada conceito e aplicação do assunto abordado. Ao final dos estudos, você será capaz de resolver a situação problema, comprovando isso através da autoavaliação.

No primeiro momento, definiremos as porcentagens, descreveremos como são calculadas e, principalmente, aplicaremos em algumas situações cotidianas, visto que é impossível iniciar os estudos de Matemática Financeira sem compreender bem o trabalho com as porcentagens. Nesta competência, além de compreender o conceito de razão, estabeleceremos proporções e o cálculo da regra de três simples. Após este estudo, você estará apto para adentrar nos assuntos da Matemática Financeira.

Na segunda competência, distinguiremos o regime de capitalização simples do composto. No primeiro, os juros são iguais em todos os períodos, mantendo uma proporcionalidade e; no segundo, ocorrem os juros sobre juros, fazendo com que o dinheiro aumente com mais rapidez e desproporcionalidade. Para cada tipo de regime há cálculos matemáticos para se obter o total de juros, as taxas etc. E será nesta competência que você irá aprender e aplicar estas fórmulas para cada situação.

Na terceira competência, distinguiremos o desconto racional do desconto comercial. Ao falar de desconto, a primeira coisa que provavelmente vem a sua cabeça é uma promoção. Mas, nesta competência, os descontos que serão tratados não são descontos de loja, mas sim, bancários. Você irá compreender como funciona o sistema de resgate de títulos e descontos de cheques antes do prazo estipulado e o porquê da quantia recebida ser sempre menor que o valor original do título.

Posteriormente, na quarta competência, construiremos fluxos de caixa e, a partir deles, analisaremos se uma proposta financeira é economicamente atrativa ou não. Muitas movimentações de entradas e saídas de dinheiro podem ser realizadas ao longo de uma negociação, então, como decidir sobre o melhor negócio? Nesta competência, você fará cálculos que ajudam a decidir, usando planilha eletrônica e calculadora financeira como auxiliares.

Na penúltima competência, analisaremos as diversas formas de pagamentos e recebimentos de dinheiro existentes. Além disso, distinguiremos os pagamentos com e sem entrada e iremos discernir se a proposta de deixar para começar a pagar depois de um tempo mais longo é, de fato, vantajosa. Todos esses casos fazem parte das anuidades e você aprenderá qual fórmula usar e como aplicar nestas situações.

Na última competência, você irá comparar e diferenciar os diversos tipos de sistemas de amortização. Além disso, descreveremos o funcionamento dos principais tipos de amortizações de dívidas e como os seus cálculos são realizados.

Competência 01

Aplicar as porcentagens

no cotidiano

Aplicar as porcentagens
no cotidiano

Imagine que você entra em uma loja e vê uma televisão com uma placa indicando que o preço está com 30% de desconto. Todos estão comprando a televisão e, acreditando que o valor está realmente baixo, você pensa em fazer a mesma compra, quando um homem se aproxima e lhe fala: “Esta televisão não está com desconto nenhum. Ontem, eu passei por aqui e a loja havia aumentado os preços de todos os produtos em 30%. Se hoje a loja está dando um desconto de 30% nesta televisão, tendo, anteriormente, aumentado o seu preço à mesma porcentagem, não há promoção alguma. Os consumidores estão sendo enganados!”. Será que o homem tinha razão? As pessoas estavam sendo, de fato, enganadas, achando que estavam levando a televisão no valor menor que o preço original?

Figura 1 – Produto promocional
Fonte: Oliveira (2014).

Intuitivamente, pensamos que se algo teve o seu valor de venda aumentado e, posteriormente, reduzido no mesmo percentual, acreditamos que o preço não foi alterado. Afinal, 30% do aumento do preço subtraído dos 30% da redução é igual a 0%. Então não houve nenhum desconto, correto?

Apesar de, em um primeiro momento, você ter sido levado a acreditar que sim, o homem que fez o comentário está errado! Você poderá calcular e mostrá-lo o valor real do desconto. Para isso, nesta competência, você irá aprender a representar as porcentagens em forma de números inteiros e aplicá-las em situações práticas.

O que são e para que servem as razões?

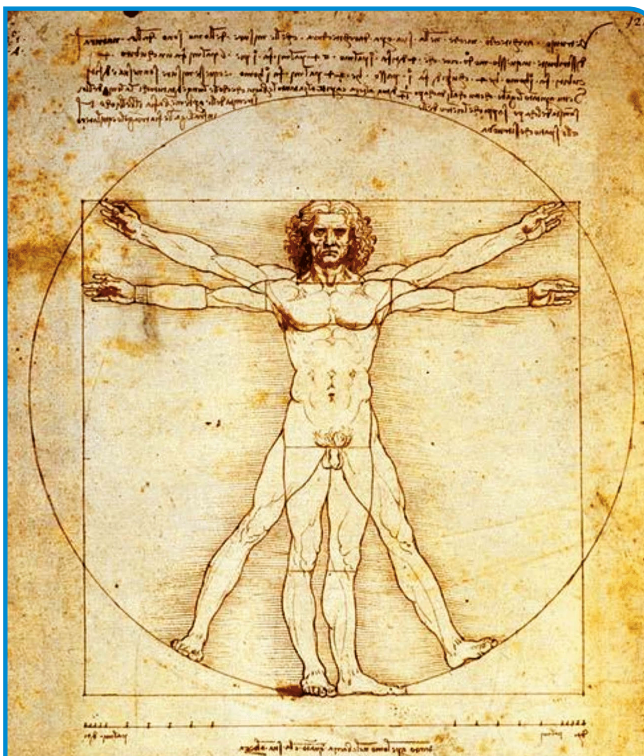
Quando você divide um número qualquer por outro, o resultado obtido desta divisão é denominado de quociente. A razão nada mais é do que a divisão de dois valores quaisquer ou o quociente desta divisão.

Assim, sejam **a** e **b** dois valores reais quaisquer, chama-se de razão a divisão $\frac{a}{b}$, em que:

a é o numerador e **b** é o denominador.

Curiosidade

Um caso particular de razão é denominada de razão áurea, também conhecida como número de ouro ou ainda lei da divina proporção. Trata-se de um número irracional simbolizado pela letra grega *phi* (Φ), representando harmonia, beleza e, principalmente, proporcionalidade.



O Homem Vitruviano é uma obra de Leonardo da Vinci para representar o modelo ideal de ser humano, com perfeitas proporções.

Figura 2 – O Homem Vitruviano
Fonte: <http://gazetavargas.org/wp-content/uploads/2011/04/homem-vitruviano.jpg>. Acesso em: 04 nov. 2014

Existem razões específicas muito usadas no nosso cotidiano. Veja alguns exemplos de razões:

A primeira, e provavelmente mais usada, será a velocidade. Imagine que você fez uma viagem cujo percurso mede 100 Km e você gastou 5 horas para chegar ao seu destino. Qual foi a sua velocidade média, levando em consideração que você não parou o carro em nenhum instante e permaneceu com a mesma velocidade por todo o percurso?

A razão que calcula a velocidade média de um automóvel é dada pela divisão do percurso (em quilômetros ou metros) pelo tempo percorrido (em horas ou segundos).

Assim:

$$V = \frac{S}{T}$$

Em que:

V é velocidade média em quilômetros por hora (km/h) ou metros por segundo (m/s);

S é espaço percorrido em quilômetros ou metros;

T é tempo percorrido em horas ou segundos.

Voltando ao exemplo da sua viagem: se você percorreu 100 km em 5 horas, então a sua velocidade média foi de:

$$V = \frac{100 \text{ Km}}{5 \text{ h}}$$

$$V = 20 \ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Assim você manteve-se numa velocidade média constante de 20 quilômetros por hora.

Outra razão específica bastante usada no nosso dia a dia é a escala de medidas.

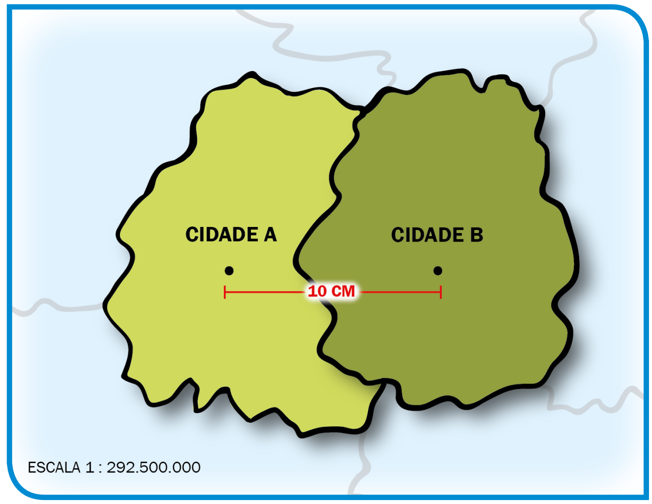


Figura 3 – Distância entre as cidades
Fonte: Oliveira (2014).

Imagine que você irá viajar da cidade A para a cidade B e só dispõe, no momento, de um mapa cuja escala é indicada por 1 : 292.500.000. Como você vai descobrir a medida real da distância entre as duas cidades?

A escala nada mais é do que uma razão entre o comprimento do desenho pelo comprimento original do que está sendo representado.

Se o mapa fornece uma escala de 1:292.500.000, significa que cada um centímetro do mapa mede, na realidade, 292.500.000 centímetros, ou seja, 2,925 quilômetros.

Assim, como é indicado no mapa, a distância entre as cidades A e B é de 10 cm e a escala do mapa é de 1:292.500.000, então significa que você irá percorrer 29,25 Km.

Atividade 01

Pesquise em *sites* de busca e livros didáticos outros exemplos de razões que aparecem constantemente no nosso dia a dia. Depois, compartilhe o resultado de sua pesquisa no fórum, analisando e discutindo essas razões.

Porcentagens

A razão mais importante que você irá encontrar ao longo de todo este livro é a razão de porcentagem. É nela que você deverá focar seu estudo a partir de agora!

Como o próprio nome sugere, porcentagem vem de “por cem”, ou seja, é um número dividido por 100.

Dessa forma:

$$35\% = \frac{35}{100} \qquad 120\% = \frac{120}{100} \qquad x\% = \frac{x}{100}$$

Quando você tiver estudando juros e as demais fórmulas de Matemática Financeira, será mais prático transformar estas razões em números reais, ou seja, efetuar a divisão e usar apenas o resultado, e não a fração inteira. Veja alguns exemplos e tente observar certa regularidade nas divisões:

$$100\% = \frac{100}{100} = 1 \qquad 1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$200\% = \frac{200}{100} = 2 \qquad 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1 \qquad 3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2 \qquad 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3 \qquad 0{,}1\% = \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001$$

Quando se fala em porcentagem, provavelmente você deve pensar de imediato nos descontos e acréscimos em preços de produtos porque esse é o exemplo mais presente do seu cotidiano. Você sabe que se algo está com uma porcentagem x de desconto, quer dizer que você não irá pagar 100% do valor deste produto em promoção, mas sim, (100 – x)% do valor original.

Logo, se uma televisão está com 30% de desconto, você só irá pagar por ela 70% do valor original. Por outro lado, se o televisor aumentou o seu preço em 30%, então o valor a ser pago é superior ao original, isto é, você irá pagar 130% do valor original do produto.

No exemplo da televisão, temos duas situações:

Descontos	Acréscimos
Quando algo tem uma porcentagem de desconto sobre o valor inicial, então o valor a ser pago, após o desconto, será:	Quando algo tem uma porcentagem de acréscimo sobre o valor inicial, então o valor a ser pago, após este acréscimo, será:
$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times \left[1 - \left(\frac{\text{porcentagem de desconto}}{100}\right)\right]$	$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times \left[1 + \left(\frac{\text{porcentagem de acréscimo}}{100}\right)\right]$

Quadro 1 – Desconto e acréscimo no valor de produtos
Fonte: autoria própria (2014).

Para esclarecer a aplicação destas duas fórmulas, suponha que a loja “Bom para Todos” venda uma máquina de lavar roupas por R$ 750,00. No início do mês, a loja resolveu aumentar em 6% todos os seus preços. Após este aumento, quanto a máquina passará a custar?

Fonte: Oliveira (2014).

Perceba que o problema trata de aumento percentual. Logo, deveremos somar esta porcentagem aos 100% correspondentes ao valor inicial da máquina.

Como este aumento é sobre o valor inicial, então:

$$\text{Valor final} = 750 \times \left[1 + \left(\frac{\text{porcentagem do acréscimo}}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = 750 \times \left[1 + \left(\frac{6}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = 750 \times (1 + 0{,}06)$$

$$\text{Valor final} = 750 \times 1{,}06$$

$$\text{Valor final} = 795 \text{ reais}$$

Assim, se você fosse comprar a máquina de lavar nesta loja após o aumento, pagaria R$ 795,00 por ela.

Suponha, agora, que a mesma loja, após constatar uma queda nas vendas, resolva, no final do mesmo mês, oferecer um desconto de 6% em cima de todos os produtos vendidos aos seus clientes. A loja realmente ofereceu um desconto ou apenas cancelou o aumento realizado no início do mês e a máquina voltará a custar R$ 750,00?

$$\text{Valor final} = 795 \times \left[1 - \left(\frac{\text{porcentagem do desconto}}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = 795 \times \left[1 - \left(\frac{6}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = 795 \times (1 - 0{,}06)$$

$$\text{Valor final} = 795 \times 0{,}94$$

$$\text{Valor final} = 747{,}30$$

Perceba que o valor a ser pago após o desconto não é o mesmo que o valor inicial da máquina. Isso aconteceu porque o desconto foi aplicado sobre o valor com o aumento e não sobre o valor inicial. Mesmo que o aumento no preço do produto seja sucedido por um desconto na mesma quantidade percentual, ainda assim o valor final a pagar será um valor um pouco menor que o inicial. No exemplo acima, o desconto final foi de R$ 2,70.

Agora que você já aprendeu a calcular descontos e acréscimos percentuais, volte ao início desta competência e tente resolver a questão do televisor. Afinal, o homem estava ou não com a razão? No problema que iniciou esta competência, não havia nada que indicasse o preço do televisor, constava apenas que houve um acréscimo e desconto sucessivo de 30% sobre o seu valor inicial.

Já que a informação do preço inicial do televisor foi fornecida, você pode denominar esta **incógnita** e aplicar os acréscimos e descontos normalmente. Assim, calculamos primeiramente o acréscimo de 30%.

$$\text{Valor final}_1 = \text{Valor inicial}_1 \times \left[1 + \left(\frac{\text{porcentagem do acréscimo}}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final}_1 = \text{Valor inicial}_1 \times \left[1 + \left(\frac{30}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final}_1 = \text{Valor inicial}_1 \times (1 + 0{,}3)$$

$$\text{Valor final}_1 = \text{Valor inicial}_1 \times 1{,}3$$

incógnita: é um valor desconhecido e único (não pode ser modificado), diferentemente de variável (mesmo sendo um valor desconhecido, pode assumir diferentes valores em uma função).

E, com o valor obtido, calculamos o valor final do desconto de 30%.

$$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times \left[1 - \left(\frac{\text{porcentagem do desconto}}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times 1{,}3 \times \left[1 - \left(\frac{30}{100}\right)\right]$$

$$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times 1{,}3 \times (1 - 0{,}3)$$

$$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times (1{,}3 \times 0{,}7)$$

$$\text{Valor final} = \text{Valor inicial} \times 0{,}91$$

Perceba que o valor final a ser pago pelo televisor será de 0,91 (91%) do valor inicial. Isso quer dizer que, no final de todos os acréscimos e descontos, você irá comprar a televisão com **9%** de desconto!

Curiosidade

Uma segunda forma de resolver esta mesma questão é, ao invés de denominar a incógnita, usar um valor numérico. Cem reais é um bom valor para ser usado, pois facilita na hora de fazer as multiplicações.

Veja que R$ 100,00 × 1,3 = R$ 130,00 e R$ 130,00 x 0,7 = R$ 91,00.

Aplicando proporções nas razões percentuais

Além dos descontos e acréscimos, a porcentagem está muito presente nas variações percentuais. Trata-se de uma taxa percentual (p) de crescimento ($p>0$) ou decrescimento ($p<0$) sob o valor de um produto.

Acompanhe uma nota publicada em um *site* de notícias, no ano de 2013: “A queda nos preços ocorreu em seis capitais, com destaque para Natal (-12,11%) e Florianópolis (-10,57%). O preço do tomate subiu em 17 capitais, somando o acumulado do ano, e 13 delas registraram altas acima de 100%. As variações mais expressivas ocorreram em Vitória (215,56%), Porto Alegre (197,10%) e Rio de Janeiro (194,65%)” (CLICAPIAUI.COM, 2013).

Fonte: Oliveira (2014).

Você deve ter observado que a notícia traz alguns percentuais positivos e outros acompanhados de um sinal negativo. O sinal negativo indica que houve uma queda no preço do tomate, já os que não acompanham nenhum sinal ou que possuem um sinal positivo indicam aumento. Outros fatos que devem ter chamado a sua atenção na notícia foram os percentuais de aumento super elevados, ultrapassando o dobro do seu valor inicial.

Acompanhe o seguinte exemplo: no início de abril do ano de 2013, o preço do quilo do tomate chegou a R$ 11,00 em algumas cidades brasileiras. No mesmo mês, semanas depois, o produto já podia ser encontrado por R$ 2,00/Kg. Nestas condições, qual foi a taxa percentual de redução?

Para resolver esta questão, podemos usar uma regra de três simples, que nada mais é que a igualdade entre duas razões diretamente proporcionais.

Curiosidade

Chamamos de regra de três diretamente proporcional a igualdade de duas razões $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, em que cada uma delas indica uma variável distinta que são diretamente proporcionais entre si. Isto é: se uma aumenta a outra também aumenta; se uma diminui, consequentemente, a outra também irá diminuir.

Existem vários exemplos no seu dia a dia que envolvem as proporções diretas. Por exemplo, a quantidade de quilômetros percorrida em uma estrada em relação ao tempo gasto para o percurso: quanto mais quilômetros medir uma estrada, mais tempo você demorará a percorrê-la, estando numa velocidade média constante. Do mesmo modo, quanto menos quilômetros ela medir, menos tempo se gastará no percurso.

Na regra de três simples sempre há 3 valores conhecidos e uma incógnita. Para calcular, você deve usar o processo conhecido como "produto dos meios igual ao produto dos extremos", isto é:

$$\text{Se } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ então } A \times D = B \times C.$$

Atividade 02

Pesquise mais exemplos de proporções diretas. É interessante encontrar alguns contraexemplos, isto é, situações em que há proporções inversas, na qual uma variável aumenta enquanto a outra diminui. Ao encontrar esses exemplos, socialize com seus colegas no Fórum e analise os exemplos dados pelos outros, que se diferenciam dos seus.

No exemplo da variação do preço do tomate, temos duas variáveis que se correspondem de forma diretamente proporcional: o preço e a porcentagem, pois na medida em que a porcentagem cai, o valor do produto também cai. O contrário também ocorre, isto é, se a porcentagem aumenta, o preço tende a aumentar.

Sabendo disso e conhecendo três valores do problema (os valores inicial e final do produto e a porcentagem inicial), você pode descobrir o quarto valor (porcentagem de redução do valor do produto) usando a regra de três simples.

$$\frac{11}{9} = \frac{100}{\text{Valor}}$$

Veja que, na igualdade das duas razões, a primeira representa os valores em reais do preço do quilo do tomate e a segunda razão representa a porcentagem correspondente a cada preço.

Inicialmente o tomate custava R$ 11,00. Obviamente esse valor corresponde a 100% do produto. Se agora ele custa R$ 2,00, houve uma redução de R$ 9,00 em relação ao preço inicial, e este valor será correspondente a x%. Como você já sabe, resolver essa igualdade de razões é o mesmo que efetuar o produto dos meios, igualando-o ao produto dos extremos, assim:

$$11 \times \text{Valor} = 9 \times 100$$

$$11\text{Valor} = 900$$

$$\text{Valor} = \frac{900}{11}$$

$$\text{Valor} = 81{,}8\%$$

Assim, a queda no preço do tomate significou 81,8% em relação ao preço anterior.

Curiosidade

Outra forma de encontrar o percentual de variação é usando a fórmula:

$$P = \left(\frac{V_{novo}}{V_{antigo}} \right) - 1$$

Se o resultado de P for negativo significa uma queda no preço caso contrário, houve um aumento no preço do produto.

Agora que você já aprendeu a trabalhar com porcentagem, já pode estudar Matemática Financeira com mais facilidade.

Resumo

Nesta competência, você iniciou os estudos de Matemática Financeira, começando pelas porcentagens. Estabeleceu relações entre os números percentuais com os números reais e teve a oportunidade de conhecer algumas razões presentes no seu dia a dia, bem como as proporções diretas, que são as igualdades de duas razões, também muito presentes no seu cotidiano. Nesta etapa, aprendeu a resolver proporções por meio da regra de três simples, igualando o produto dos meios pelo produto dos extremos, e aplicou este conhecimento nos problemas de variação percentual. Por fim, contrariou a ideia intuitiva de que aumento e desconto sucessivos em mesma quantidade não volta ao valor inicial do produto.

Autoavaliação

1. O senhor Alfredo é dono do supermercado “Compre Bem”. Recentemente, ele decidiu aumentar os preços dos produtos em 10% e, hoje, ordenou um novo aumento de 15%. Dessa forma, quantos por cento foi o aumento total dos produtos do supermercado?

a) 2,65%;

b) 25%;

c) 26,5%;

d) 126,5%.

2. Mônica viu um vestido muito bonito no shopping com 20% de desconto. Contudo, mesmo na promoção, Mônica ainda não tinha dinheiro suficiente para comprá-lo. A vendedora, então, lhe ofereceu um novo desconto sobre o valor promocional de 5%. Assim, Mônica levou o vestido com quantos por cento de desconto total?

a) 15%;

b) 24%;

c) 25%;

d) 76%.

3. Uma lata de leite condensado com 360 ml de volume estava sendo vendida ao valor de R$ 3,50. Constatando as baixas vendas do produto, o fabricante resolveu fabricar o leite condensado em tamanho menor, com 220 ml. Mantendo as proporções de quantidade e preço de venda, quanto custará, aproximadamente, o leite condensado na versão menor?

a) R$ 1,75;

b) R$ 2,10;

c) R$ 2,14;

d) R$ 5,72.

4. Lauro estava fazendo compras quando se deparou com uma marca de achocolatado que estava sendo vendido na opção de pote, com 400g, por R$ 4,95 e na opção sachê, de 900g, por R$ 8,80. Qual das duas opções é mais vantajosa para Lauro, financeiramente?

a) Nenhuma;

b) Qualquer uma das duas;

c) O achocolatado em pote;

d) O achocolatado em sache.

5. Em um mercado, os refrigerantes estão sendo vendidos em pacotes com 10, porém, o cliente só paga por 8. Nestas condições, o desconto, em porcentagem, aplicado ao preço de cada refrigerante corresponde a:

a) 80%;

b) 20%;

c) 12,5%;

d) 10%.

Competência 02

Aplicar os tipos de juros

e adequar as taxas

Aplicar os tipos de juros
e adequar as taxas

Suponha que você queira comprar um carro no valor de R$ 20.000,00 e, como não tem este dinheiro disponível, resolve pedir um empréstimo ao banco, planejando pagar a dívida após 3 anos. No banco “Nosso País”, o empréstimo é concedido com cobrança de juros simples de 3,5% ao mês. No banco “Poupar”, é cobrado juros compostos de 2,5% ao mês. Tendo que escolher entre os dois bancos, qual você optaria: pelo que cobra a taxa menor ou maior?

Fonte: Oliveira (2014).

Como bem define Assaf Neto (2003, p. 15), “a Matemática Financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro, no caixa, verificados em diferentes momentos”.

Se você tiver nascido na década de oitenta, ou antes disso, deve lembrar de que há 10 anos comprávamos muito mais produtos do que compramos com uma mesma quantia de dinheiro nos dias atuais. Obviamente, o salário-mínimo também era bem menor que hoje. Fazer estas comparações é constatar que receber uma quantia de dinheiro no presente, no passado ou no futuro, não é a mesma coisa, ou seja, uma mesma quantia de dinheiro possui valores diferentes ao longo do tempo. Assaf Neto (2003, p. 15), afirma que “uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã".

As pessoas preferem consumir no presente do que no futuro. Então, aquele que empresta dinheiro e deixa de dispô-lo no presente, certamente espera uma recompensa por este empréstimo. Essa recompensa é manifestada na forma de um pagamento, além, é claro, da devolução do dinheiro emprestado. "Este pagamento ou remuneração pelo uso do dinheiro costuma ser expresso na proporção do capital emprestado e é representado por um índice de proporcionalidade, denotado por i (índice ou taxa de juros)." (RODRIGUES; MINELLO, 2009, p. 101).

Assim, nascem as taxas de juros no mercado financeiro. Estes juros podem ser simples ou compostos, mas, antes de você entender o que cada um significa e como são aplicados, observe logo abaixo o significado de cada termo da Matemática Financeira que irá ser muito usado a partir de agora.

Capital é a quantia de dinheiro investida ou emprestada. Também pode ser denominado de valor presente, pois trata da quantia que você dispõe hoje. A representação do capital é feita com as letras **C** ou **PV** (*Present Value*).

O **montante** é a quantia total de dinheiro que se recebe ou que foi paga após o término do período de empréstimo ou aplicação. Representa-se com as letras **M** ou **FV** (*Future Value*).

O **juro** trata-se de uma quantia em dinheiro que representa a compensação/acréscimo que se recebe/paga por um empréstimo ou um rendimento sob um valor aplicado.

Suponha, por exemplo, que você fez um empréstimo de R$ 1.000,00 e, ao final do prazo, pagou R$ 1.500,00 à agência financeira. O capital cedido foi R$ 1.000,00, o montante pago foi no valor de R$ 1.500,00 e o juro, neste caso, foi de R$ 500,00. Perceba que sempre que você quiser saber o valor dos juros, deverá subtrair do montante o capital inicial. Assim, independente do regime de juros, teremos:

$$J = M - C \qquad \text{OU} \qquad J = FV - PV$$

A **taxa de juros** ou índice é um número percentual que incide sobre o capital para gerar um montante. Este índice pode ser incidido em diferentes períodos de tempo e, para cada período, tem-se uma sigla que o representa:

a.d. – taxa de juros cobrada ao dia;

a.m. – taxa de juros cobrada ao mês;

a.b. – taxa de juros cobrada ao bimestre;

a.t. – taxa de juros cobrada ao trimestre;

a.s. – taxa de juros cobrada ao semestre;

a.a. – taxa de juros cobrada ao ano.

Posteriormente, você verá um tópico apenas acerca do estudo dessas taxas e aprenderá a transformá-las de um período de tempo para outro.

Importante

Existem taxas de juros cobradas semanalmente, a cada dois anos, etc. Nestes casos, não há uma sigla específica e essas unidades sempre virão expressos por extenso.

Outros conceitos importantes para a Matemática Financeira estão listados abaixo:

Tempo, como o próprio nome já sugere, trata-se do tempo total do empréstimo e é representado pela letra **n**;

Aplicação é tudo que você faz com o seu dinheiro de modo a investi-lo, seja em uma caderneta de poupança, em fundos de investimentos, dentre outros. Este termo será muito usado a partir de agora. Não há uma sigla que o representa, visto que não se trata de uma variável ou incógnita inserida em fórmulas matemáticas, mas, sim, de uma ação realizada com o dinheiro.

Agora que você conhece os termos mais usados na Matemática Financeira, está apto para compreender os dois tipos de regime de juros existentes no mercado financeiro.

Juros simples

Observe a fatura do cartão de crédito de Fabiana:

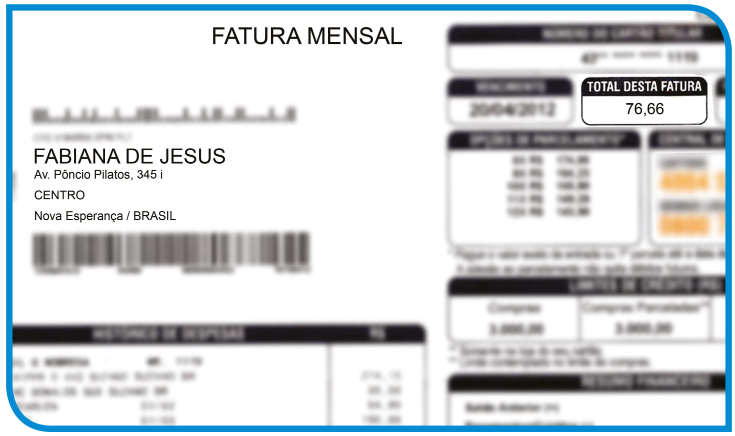


Figura 4 – Fatura de cartão de crédito
Fonte: Oliveira (2014).

Veja, em uma imagem mais ampliada, o que está escrito naquelas letrinhas minúsculas ao fim da fatura:

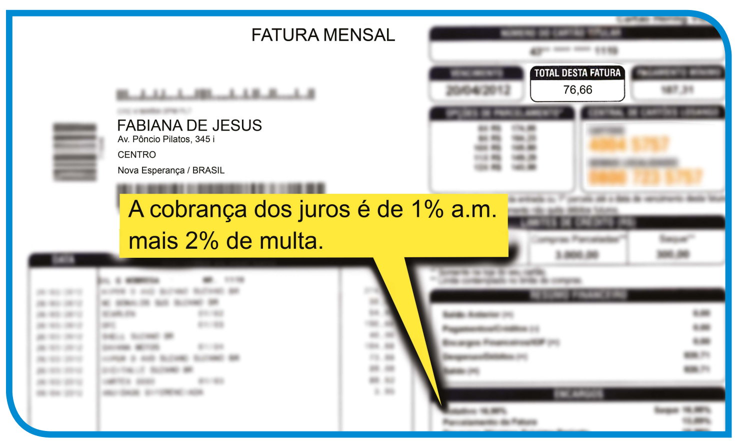


Figura 5 – Fatura de cartão de crédito com destaque
Fonte: Oliveira (2014).

A cobrança dos juros é de 1% a.m., no entanto, não há nenhuma especificação quanto ao regime desses juros, isto é, se é simples ou composto. Se você verificar essa informação em suas contas de água, luz, telefone e/ou cartão de crédito, provavelmente não encontrará. Praticamente nenhuma fatura vem com esta especificação ao cliente.

Fabiana já está devendo essa conta há 5 meses e precisa fazer os cálculos dos juros que irá pagar. E agora? Como saber se a empresa de cartão de crédito usado pela Fabiana está cobrando-a em regime de juros simples ou compostos?

Suponha, primeiramente, que a cobrança seja realizada a juros simples e faça os cálculos para os 5 meses. A fatura tem valor total de R$ 76,66 e, a cada mês, é cobrado 1% de juros simples. Veja como fica isso:

Mês	Capital	Juros	Montante
0	R$ 76,66	R$ 0,00	R$ 76,66 + R$ 0,00 = R$ 76,66
1	R$ 76,66	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 76,66 + R$ 0,77 = R$ 77,43
2	R$ 77,43	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 77,43 + R$ 0,77 = R$ 78,20
3	R$ 78,20	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 78,20 + R$ 0,77 = R$ 78,97
4	R$ 78,97	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 78,97 + R$ 0,77 = R$ 79,74
5	R$ 79,74	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 79,74 + R$ 0,77 = R$ 80,51

Quadro 2 – Valor da conta ao longo de 5 meses de juros simples
Fonte: autoria própria (2014).

No mês zero, a conta ainda não venceu, logo, não será cobrada taxa de juros. Os juros começarão a ser cobrados a partir do mês 1, que é quando inicia o atraso da conta. Como neste regime os juros são simples, isso significa dizer que o 1% a.m. será calculado sempre em cima do valor inicial, ou seja, do valor original da fatura (R$ 76,66).

Como 1% de R$ 76,66 é R$ 0,77 (basta multiplicar o capital C pela taxa i, ou seja, R$ 76,66 por 0,01), então, todo mês irá ser acrescentado ao valor original da fatura R$ 0,77 de juros. Perceba que, ao fim de cinco meses, ela estará devendo o capital inicial mais cinco vezes o valor correspondente aos juros mensal. E se ela ficasse devendo por 10 meses? Quanto pagaria de juros?

Construir uma tabela, como a mostrada no Quadro 2, dá trabalho e requer muito tempo, mas existe uma forma mais prática e rápida de fazer este cálculo. Perceba que o valor dos juros não se altera, sendo sempre a mesma quantidade $C \times i$ acrescida em cada mês. Portanto, se Fabiana deve 5 meses, ela pagará $5 \times C \times i$ de juros. Em 10 meses, ela pagará $10 \times C \times i$. Em 1 ano, ela pagará $12 \times C \times i$ e assim por diante. Logo, o cálculo dos juros simples será dado pela expressão:

$$J = C \times i \times n \qquad \text{ou} \qquad J = PV \times i \times n$$

Em que,

J é o valor dos juros

C ou PV é o capital inicial ou valor presente

i é a taxa de juros

n é o tempo total

Importante

Cuidado com a inserção de taxas e tempos na fórmula! O tempo n estará sempre em função da taxa i. Assim, se a taxa vir em anos, o tempo também deverá estar em anos. Caso seja necessário, use a regra de três simples para fazer a conversão entre as unidades de tempo.

Suponha que Fabiana demore 2 anos e meio para pagar a fatura. Qual será o valor dos juros cobrados ao final deste período? Quanto ela deverá pagar no total?

Antes de resolver, lembre-se que o tempo está em anos e a taxa está em meses, portanto, você deve, primeiramente, transformar o tempo para meses (que é a mesma unidade usada na taxa), usando regra de três para converter a unidade de tempo:

$$\frac{1 \text{ ano}}{2{,}5 \text{ anos}} = \frac{12 \text{ meses}}{n \text{ meses}}$$

Fazendo o produto dos meios pelo produto dos extremos, como você aprendeu na competência anterior, teremos:

$$1 \times n = 2{,}5 \times 12$$

$$n = 30 \text{ meses}$$

Descoberto o tempo, agora sim você pode aplicar a fórmula dos juros simples:

$$J = C \times i \times n$$

$$J = 76{,}66 \times 0{,}01 \times 30$$

$$J = \text{R\$ } 23{,}00$$

Lembre-se que este valor não é o total que Fabiana irá pagar pela fatura, mas, sim, os juros acumulados ao longo de 2,5 anos de atraso da fatura.

Você já viu nesta competência que para saber o montante (valor final ou valor futuro) após a aplicação dos juros, deve-se somar ao capital (valor inicial) o valor dos juros calculado, ou seja:

$$M = C + J \qquad \text{ou} \qquad M = PV + FV$$

Neste caso, como J = R$ 23,00, então:

$$M = C + J$$

$$M = 76{,}66 + 23{,}00$$

$$M = \text{R\$ } 99{,}66$$

No caso da fatura do cartão da Fabiana, além da taxa mensal de juros, também é cobrada uma multa de 2% do valor da conta. Você viu, na competência anterior, que a porcentagem de algum valor é o produto deste valor pelo percentual representado em número real, portanto, 2% de R$ 76,66 será:

$$\text{Valor} = 76{,}66 \times \frac{2}{100}$$

$$\text{Valor} = \text{R\$ } 1{,}53$$

Finalmente, Fabiana irá pagar pela fatura após 2,5 anos:

99,66 + 1,53 = R$101,19

Atividade 01

Para saber o total a ser pago em uma dívida a juros simples, calculamos primeiro os juros e depois somamos o resultado ao capital inicial para gerar o montante. Analisando estes dois procedimentos, pense em uma forma direta e única de calcular o montante da dívida, ou seja, que fórmula poderíamos usar para calcular o montante em um só procedimento? Pesquise esta fórmula em livros e na Internet, compare a fórmula que você elaborou com a que encontrou e compartilhe com seus colegas no fórum.

Antes de partir para o cálculo da dívida da Fabiana nos juros compostos, acompanhe outro exemplo de aplicação dos juros simples: supondo que você tomou emprestado de uma agência de financiamentos R$ 4.500,00 e, ao final de 3,5 anos, pagou à agência pelo empréstimo o valor de R$ 10.200,00. Qual foi a taxa de juros simples cobrada pela agência?

Para resolver o problema, a primeira coisa a se fazer é extrair os dados desta questão. Para isso, você deve se perguntar o que significa cada valor escrito em termos da Matemática Financeira. Perceba que, **inicialmente,** você fez um empréstimo de R$ 4.500,00, portanto, este é o seu **valor presente**. E, **posteriormente**, você pagou R$ 10.200,00, o que significa dizer que este valor é o **valor futuro**.

Se o tempo está em **anos**, então a taxa de juros também será encontrada em **anos** (exceto se a questão pedisse que você encontrasse em meses ou outra unidade de tempo. Neste caso, você deveria converter 3,5 anos à unidade pedida).

Assim,

PV = R$ 4.500,00

FV = R$ 10.200,00

n = 3,5 anos

i = ?

Se o montante é o capital somado com os juros, então podemos concluir que os juros é o montante subtraído do capital. Em outras palavras, é o que você paga menos o que você tomou emprestado.

$$J = FV - PV$$

$$J = 10.200,00 - 4.500,00$$

$$J = 5.700,00$$

Você também já aprendeu que $J = C \times i \times n$, portanto,

$$5.700 = 4.500 \times i \times 3,5$$

$$5.700 = 15.750 \times i$$

$$i = \frac{5.700}{15.750}$$

$$i \cong 0,36 \text{ a.a.}$$

Assim, os juros cobrados nesta transação foram de 36% $\left(\frac{36}{100} = 0,36\right)$. Observe que você acompanhou duas situações de juros simples:

- Encontrar o valor futuro (montante);

- Encontrar a taxa de juros cobrada;

Você pode se deparar, também, com outras duas situações:

- Encontrar o prazo da aplicação;

- Encontrar o valor presente, isto é, o valor do capital aplicado.

Tente resolver cada um dos dois exemplos a seguir e depois compare sua resposta com a que é fornecida neste livro.

Fonte: Oliveira (2014).

Uma situação que se contrapõe às expostas até agora é o desejo de um investidor de triplicar o dinheiro que tem hoje e, para isso, faz uma aplicação que rende juros mensais simples de 0,5%. Em quanto tempo ele esperará para ter o seu capital três vezes maior? Nesta situação, não é fornecido o valor do capital, mas você sabe que se você tem R$ 100,00, por exemplo, esperará ter, ao final de um determinado tempo de aplicação, R$ 300,00. De modo análogo, se você tem R$ 1.000,00, deseja ter, como montante, R$ 3.000,00. Ou seja, o capital **C** que você tem hoje será aplicado de modo que você receba **3C** após percorrido um certo tempo, rendendo sempre 0,5% a.m.

Logo,

$PV = C$

$FV = 3C$

$J = 3C - C = 2C$

$i = 0{,}005$

$n = ?$

Substituindo os valores dados na fórmula, temos:

$$J = C \times i \times n$$

$$2C = C \times 0{,}005 \times n$$

$$\frac{2C}{C} = 0{,}005 \times n$$

$$2 = 0{,}005 \times n$$

$$\frac{2}{0{,}005} = n$$

$$n = 400 \text{ meses}$$

Assim, levará 400 meses para que você triplique o seu capital.

Nessa mesma linha de pensamento, imagine que você está se planejando para comprar, daqui a 4 anos, um imóvel no valor de R$ 100.000,00 com o montante de uma aplicação financeira que remunera a juros simples de 14% a.s. Nestas condições, qual será o valor que você deve aplicar hoje?

$PV = C$

$FV = R\$ \ 100.000{,}00$

$n = 4$ anos $= 8$ semestres

$i = 14\%$ a.s.

Veja que a taxa está ao semestre e o tempo em anos, por isso, se faz necessário a conversão do tempo para semestre, em função da taxa. Como 1 ano possui 2 semestres, basta multiplicar por dois.

$J = FV - PV$

$J = 100.000 - C$ (I)

Como você já sabe que:

$J = C \times i \times n$ (II)

Substituímos (I) em (II):

$$100.000 - C = C \times 0{,}14 \times 8$$

$$100.000 - \text{Valor} = C \times 1{,}12$$

$$100.000 = 1{,}12C + C$$

$$100.000 = 2{,}12C$$

$$C = \frac{100.000}{2{,}12}$$

$$C = R\$\ 47.169{,}81$$

Portanto, será necessário você aplicar R$ 47.169,81 para obter, após 4 anos, os R$ 100.000,00 necessários.

Juros compostos

Você ainda lembra da conta atrasada que a Fabiana precisava pagar? Nela, não havia nenhuma informação se os juros de 1% ao mês eram simples ou compostos.

Inicialmente, você calculou o valor da dívida, após 5 meses, em juros simples, e descobriu que a fatura no valor de R$ 76,66 acumularia para R$ 80,51. Mas, se os juros cobrados pelo cartão de crédito forem no regime composto? Há quem defina o regime de juros compostos simplesmente como um processo de “juros sobre juros”.

Na capitalização simples, calculam-se apenas os juros sobre o capital inicial e soma-se tantas vezes quanto for o prazo estabelecido. Diferentemente desse processo, na capitalização composta calcula-se os juros do capital inicial, que gerará um montante no primeiro período. Calcula-se novamente os juros, agora sobre este primeiro montante, que gerará o montante do segundo período, e assim sucessivamente. Para entender melhor este procedimento, veja a tabela a seguir que mostrará, mês por mês, a dívida do cartão de crédito de Fabiana:

Mês	Capital	Juros	Montante
0	R$ 76,66	R$ 0,00	R$ 76,66 + R$ 0,00 = R$ 76,66
1	R$ 76,66	R$ 76,66 × 0,01 = 0,77	R$ 76,66 + R$ 0,77 = R$ 77,43
2	R$ 77,43	R$ 77,43 × 0,01 = 0,77	R$ 77,43 + R$ 0,77 = R$ 78,20
3	R$ 78,20	R$ 78,20 × 0,01 = 0,78	R$ 78,20 + R$ 0,78 = R$ 78,98
4	R$ 78,98	R$ 78,98 × 0,01 = 0,79	R$ 78,98 + R$ 0,79 = R$ 79,77
5	R$ 79,77	R$ 79,77 × 0,01 = 0,80	R$ 79,77 + R$ 0,80 = R$ 80,57

Quadro 3 – Valor da conta ao longo de 5 meses de juros compostos
Fonte: autoria própria (2014).

Atividade 02

Compare os quadros 2 e 3 e faça um registro escrito das semelhanças e diferenças. O que mudou? Por que o valor no regime composto foi maior do que no simples? Por que a diferença é tão pequena? Discuta sobre estes e outros questionamentos no fórum com seus colegas.

Veja a mesma tabela acima, mas agora com as suas siglas de representações ao invés dos dados numéricos:

Mês	Capital	Juros	Montante
0	C	R$ 0	C + R$ 0 = C
1	C	$C \times i$	$C + C \times i = C(1 + i) = M_1$
2	M_1	$M_1 \times i$	$M_1 + M_1 \times i = M_1 \times (1 + i) = C \times (1 + i) \times (1 + i) = C \times (1 + i)^2 = M_2$
3	M_2	$M_2 \times i$	$M_2 + M_2 \times i = M_2 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^2 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^3 = M_3$
4	M_3	$M_3 \times i$	$M_3 + M_3 \times i = M_3 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^3 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^4 = M_4$
5	M_4	$M_4 \times i$	$M_4 + M_4 \times i = M_4 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^4 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^5 = M_5$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	M_n	$M_n \times i$	$C \times (1 + i)^n = M_n$

Quadro 4 – Caso geral da aplicação de juros compostos ao longo de *n* meses
Fonte: autoria própria (2014).

Você já aprendeu que os juros são taxas percentuais e que, para saber a porcentagem de um valor, devemos multiplicar o percentual por este valor. Na matemática, quando um mesmo valor é multiplicado entre si, duas ou mais vezes, esta operação é denominada de potenciação. Assim:

$5 \times 5 = 5^2$

$12 \times 12 \times 12 = 12^3$

$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$

Analogamente, se um número **x** é multiplicado por si **n** vezes, o seu resultado será $\mathbf{x^n}$ (lê-se **x** elevado a **n**).

Como nos juros compostos têm-se “juros sobre juros”, a taxa também é multiplicada entre si tantas vezes quanto for o período de tempo. Eis a explicação do expoente **n** na fórmula:

$$M_n = C \times (1 + i)^n \quad \text{ou} \quad FV = PV \times (1 + i)^n$$

Importante

Os juros compostos sempre serão maiores do que os juros simples. É por isso que para as empresas de cartões de crédito, telefonia etc., embora não especifiquem nas faturas o regime de capitalização cobrado, os juros sempre serão compostos. Assim, em questões ou práticas cotidianas em que não fica claro o tipo de juro, subtenda que é o composto.

Você deve ter notado que a fórmula dos juros compostos já fornece o valor futuro. No caso da Fabiana, o valor final da dívida. Já nos juros simples, a fórmula apenas calcula a quantidade de juros, necessitando somar com o valor presente para obter o futuro.

Ainda acerca da dívida da conta da Fabiana, você descobriu anteriormente que, se ela pagar a dívida após 30 meses (dois anos e meio), pagaria R$ 101,19.

Quanto aumentaria o pagamento se este cálculo fosse realizado a juros compostos?

Temos como dados:

PV = R$ 76,66 (valor da fatura)

n = 30 meses

i = 1% a.m.

FV = ?

Você já sabe que $FV = PV \times (1 + i)^n$, então:

$$FV = 76{,}66 \times (1 + 0{,}01)^{30}$$

$$FV = 76{,}66 \times 1{,}35$$

$$FV = 103{,}49$$

Total da dívida: R$ 103,49 + 2% de multa = R$ 103,49 + R$ 1,53 = R$ 105,02.

Houve, portanto, um aumento de R$ 3,83.

Curiosidade

As poupanças em que você e a maioria das pessoas costumam guardar o seu dinheiro possuem rendimento a juros compostos. Embora seja ruim para o banco (visto que terá que pagar ao cliente juros maiores que no caso do regime simples), não faria sentido aos bancos usarem os juros simples, pois, neste caso, o cliente poderá, todo final do mês, sacar toda a quantia disponível e depositar novamente, fazendo com que o rendimento do mês seguinte seja calculado sobre o novo valor. Ou seja, o capital inicial em que os juros incidirá, agora, é a quantia depositada.

Assim como nos juros simples, veja três situações de aplicação de juros compostos. Tente responder a questão e só depois compare com a resposta apresentada. Propositalmente, serão os mesmos exemplos, porém, com o regime de juros diferente, para que você possa comparar os resultados das duas capitalizações:

Exemplo 01: no primeiro caso, suponha que você tomou emprestado de uma agência de financiamentos R$ 4.500,00 e, ao final de 3,5 anos, pagou à agência pelo empréstimo o valor de R$ 10.200,00. Qual foi a taxa de juros compostos cobrada pela agência?

Tem-se como dados da questão:

PV = R$ 4.500,00

FV = R$ 10.200,00

n = 3,5 anos

i = ?

Como o regime de juro é composto, então:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$10.200 = 4.500 \times (1 + i)^{3,5}$$

$$\frac{10.200}{4.500} = \times (1 + i)^{3,5}$$

$$2,27 = (1 + i)^{3,5}$$

$$\sqrt[3,5]{2,27} = 1 + i$$

$$1,26 = 1 + i$$

$$i = 1,26 - 1$$

$$i = 0,26$$

Assim, a taxa de juros é de 26% a.a.

Se você quiser tirar a "prova real" e aplicar esta taxa na fórmula dos juros compostos para encontrar o FV, não irá resultar em R$ 10.200,00, visto que a taxa encontrada é um valor aproximado. Quanto mais casas decimais você usar para a taxa, mais próximo do valor real ficará o resultado.

Importante

A operação inversa da potenciação é a radiciação. Assim, quando um número e/ou incógnita está elevado a um expoente, extrai a raiz de mesmo índice que o expoente, em ambos os termos da equação, para não alterar o resultado.

Por exemplo: $x^2 = 4 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Longrightarrow x = 2$.

Exemplo 02: um investidor quer triplicar o dinheiro que tem hoje e, para isso, faz uma aplicação que rende juros mensais compostos de 0,5%. Quanto tempo ele deve esperar para ter o seu capital três vezes maior?

Neste caso,

PV = C

FV = 3C

i = 0,005

n = ?

Substituindo na fórmula, fica:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$3C = C \times (1 + 0,005)^n$$

$$\frac{3C}{C} = 1,005^n$$

$$3 = 1,005^n$$

Importante

Ao se ter uma equação com incógnita no expoente, a forma mais simples de resolvê-la é aplicando logaritmo de base 10 em ambos os termos da equação e aplica-se uma das propriedades dos logaritmos, que é:

$$\log x^n = n \times \log x\,.$$

Como o resultado geralmente possui muitas casas decimais, será inviável fazer a conta manualmente. Assim, digita-se o valor e usa-se a tecla **log** da calculadora científica para realizar tal procedimento.

$\log 3 = \log 1{,}005^n$

$\log 3 = n \times \log 1{,}005$

$n = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}005}$

$n \cong \dfrac{0{,}477}{0{,}0021}$

$n \cong 227$ meses

Lembre-se que, dependendo da quantidade de casas decimais que se use, o tempo pode aumentar ou diminuir significativamente. O ideal é usar todas as casas decimais da calculadora para ter o resultado mais preciso possível.

Exemplo 03: agora, suponha que você está se planejando para comprar, daqui a 4 anos, um imóvel no valor de R$ 100.000,00, com o montante de uma aplicação financeira que remunera a juros compostos de 14% a.s. Nestas condições, qual será o valor que você deve aplicar hoje?

Dados da questão:

FV = R$ 100.000,00

n = 4 anos = 8 semestres

i = 14% a.s. = 0,14

PV = ?

Substituindo os dados na fórmula:

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$100.000 = PV \times (1 + 0{,}14)^8$$

$$100.000 = PV \times 2{,}8526$$

$$PV = \frac{100.000}{2{,}8526}$$

$$PV = R\$\ 35.055{,}74$$

Assim, ao invés dos R$ 47.169,81 que você deveria economizar a juros simples, bastará aplicar R$ 35.055,74 para obter o mesmo valor futuro no mesmo período de tempo, porém, a juros compostos.

Usando a calculadora financeira

Se você é um empresário, uma pessoa de negócios com muitas aplicações financeiras, não deve ter muito tempo e gosta de coisas que tornem seu dia a dia mais prático, rápido e fácil. Bem, mesmo que você não seja uma pessoa ativa no mundo dos negócios, também deve gostar de praticidade, facilidade e rapidez, não é mesmo?

Foi nesse contexto que a calculadora financeira foi criada. Existem diversos modelos e marcas no mercado, porém, uma das mais fáceis e simples de manusear é a HP12C.

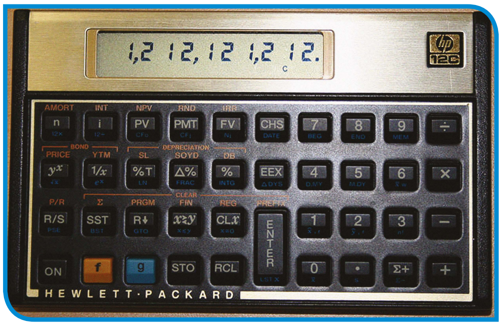
Internet

Você pode ter acesso ao emulador da calculadora científica HP 12C através do *link* <http://epx.com.br/ctb/hp12c.php>. Acesse, faça alguns testes e confira!

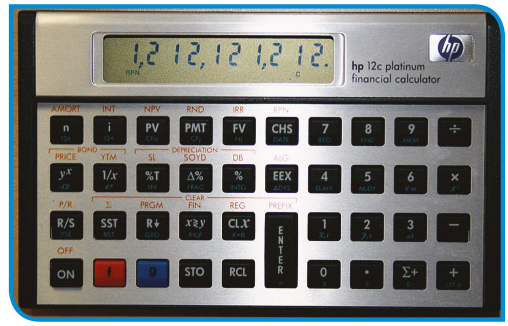
Teste de circuitos na hora da compra

Na hora de comprar sua calculadora, faça um teste bem simples para saber se todas as funções estão operando corretamente: aperte o botão de multiplicação (×), mantenha-o pressionado enquanto você liga a máquina na tecla **ON** e, em seguida, solte a tecla **×** e depois solte a tecla **ON**.

Aparecerá no visor da calculadora a mensagem *running*, que significa "executando". Após cerca de 20 segundos, o visor mostrará a seguinte informação:



HP 12C dourada



HP 12C Platinum

Caso o teste resulte na mensagem *Error 9* ou não apareça nada, a calculadora deve estar com problemas.

Reiniciando a calculadora

É possível fazer uma espécie de *reset* (reconfigurar, restabelecendo uma configuração inicial) na calculadora, deixando-a da forma como saiu da fábrica. Com a calculadora desligada, pressione o botão de subtração e, mantendo esse botão pressionado, pressione o ON. Depois solte o botão de subtração e, em seguida, o botão ON.

No visor aparecerá a mensagem *Pr Error*. Basta ligar a calculadora novamente para ela funcionar no seu modo normal.

Limpando a memória da calculadora

Crie o hábito de sempre limpar a memória da calculadora antes de iniciar qualquer operação. Para isso, basta pressionar **f** e, em seguida, pressione **CLX**. Para limpar apenas um número casualmente digitado errado, pressione apenas **CLX**.

Optando pela quantidade de casas decimais

O visor da calculadora é capaz de apresentar até 10 dígitos, assim, você pode escolher entre 0 a 9 casas decimais fazendo o seguinte procedimento: pressione o botão **f**, em seguida, pressione um número de 0 a 9 para escolher a quantidade de casas decimais desejadas.

Deixando-a com a pontuação brasileira

Para que a parte fracionária do número seja separada por vírgula e não por ponto, como no caso americano, faça o seguinte procedimento:

Com a máquina desligada, pressione o botão **ON** e, em seguida, pressione o botão com o sinal de ponto e mantenha-o pressionado. Solte o botão **ON** e depois solte o botão ponto.

Calculando porcentagens

Para o cálculo das porcentagens não é necessário transformar o percentual em número inteiro, basta inserir o valor correspondente à porcentagem. Na calculadora, pressionar ENTER, inserir a porcentagem e pressionar %. 15% de R$ 2.200,00, por exemplo, na calculadora, fica:

2200 ENTER 15 %

A calculadora financeira também fornece o percentual de um valor referente a um total. Por exemplo: você recebeu este mês R$ 2.740,00, do qual gastou R$ 350,00 em remédios. Qual o percentual do seu salário foi gasto na compra dos remédios?

Digite na calculadora:

2740 ENTER 350 %T

E no visor aparecerá os 12,77% de gastos com remédios.

Usando a função calendário

A calculadora HP12c fornece a data da próxima fatura e uma data passada, bem como a variação de dias entre duas datas inseridas.

Exemplo 01: em que data vencerá a fatura de uma compra realizada no dia 09/09/2014, a qual você optou pelo pagamento após 50 dias?

Pressione a tecla **g**, depois pressione a tecla **DMY** e, em seguida, digite a data separando o dia do mês e ano pela tecla ponto (no modelo DD.MMAAAA, no caso: 09.092014) e pressione **ENTER**. Então você deve digitar o total de dias (no caso: 50), pressione a tecla **g** e, por último, pressione a tecla **CHS**.

No final, aparecerá no visor: 29.10.2014 3.

O número que aparece no final corresponde ao dia da semana (1 = segunda-feira; 2 = terça-feira; 3 = quarta-feira; e assim por diante...).

Exemplo 02: se hoje é 29/10/2014 e você comprou há 50 dias, em qual data você fez a compra?

Digite a data separando o dia do mês e ano por ponto (no modelo DD.MMAAAA, no caso: 29.102014), pressione **ENTER** e, em seguida, digite o total de dias (no caso, 50). Por último, as teclas **CHS**, **g** e **CHS** devem ser pressionadas.

O visor exibirá 9.09.2014   2, indicando que sua compra foi realizada no dia 9 de setembro de 2014, numa terça-feira.

Exemplo 03: se você fez uma compra no dia 09/09/2014 e pagou no dia 29/10/2014, qual foi a variação de dias, ou seja, o período para pagamento?

Na calculadora, digite a data inicial (mais antiga) com a separação do dia (isto é, 09.092014), depois pressione o botão **ENTER** e, em seguida, digite a data final (mais recente) que, no exemplo, é 29.102014. Depois, pressione as teclas **g** e **EEX**.

No visor aparecerá o total da variação dos dias, no caso, 50 dias.

Calculando juros simples

Tanto nos juros simples quanto nos juros compostos, as teclas usadas, sem importar a ordem de inserção, são:

- n é tempo;
- i é taxa;
- PV é valor presente;
- FV é valor futuro.

Importante

Excepcionalmente para o cálculo dos juros simples, usa-se o tempo sempre em dias e a taxa sempre em ano.

Exemplo: você fez um empréstimo de R$ 1.300,00 a regime simples de 5% a.a. e prazo de 90 dias. Qual o valor dos juros cobrado?

Digite:

90, n, 1300, PV, 5, i, f e **i**

Aparecerá: - 16,25. O sinal negativo indica os juros. Para converter o sinal em positivo, basta pressionar a tecla **CHS**.

Calculando juros compostos

Nos juros compostos não há necessidade de conversão de taxas, mas o tempo e a taxa devem estar na mesma unidade de medida. Das quatro variáveis que compõem a fórmula dos juros compostos (FV, PV, i e n), sempre que você inserir os dados de três delas, a calculadora fornecerá o valor da quarta variável.

Exemplo: suponha que você quer quadruplicar os R$ 22.000,00 que possui na poupança. Se o rendimento é a juros simples de 5% a.m., em quantos meses terá o valor de R$ 88.000,00?

Importante

Em caso de investimentos, você "tira" do seu bolso para aplicar o dinheiro. Na Matemática Financeira essa movimentação é chamada de saída de fluxo de caixa e é indicado por um sinal negativo. No caso de um empréstimo, o dinheiro está entrando no fluxo, portanto, positivo. Assim, no exemplo acima, os R$ 22.000,00 que está sendo aplicado deve ser inserido com o sinal negativo. Para isso, pressione a tecla **CHS** após o valor inserido.

Na calculadora deve ficar:

22000, CHS, PV, 88000, FV, 5, i e **n**

No visor aparecerá que o número de meses necessários é 29.

Resumo

Antes de iniciar esta competência, talvez você estivesse pensado que o estudo das porcentagens era o que dominava e prevalecia na Matemática Financeira. Nesta competência, você pôde se aprofundar mais no assunto das finanças, estudando o conceito e sigla de cada termo usado na Matemática Financeira. Aprendeu a diferenciar e calcular os juros simples (que incidem apenas em cima do capital inicial) e os juros compostos (que são calculados sempre em cima do montante de cada período), envolvendo as quatro situações destacadas (quando se deseja o valor futuro; quando necessita do prazo; quando se quer encontrar a taxa; ou quando se precisa do valor presente). Converteu as taxas no regime de juros simples e aplicou todos os conhecimentos construídos nesta e na competência anterior, manuseando a calculadora financeira. Fez comparações, análises, testes e ainda refletiu acerca do sistema de rendimento das poupanças e do porquê de não se cobrar a juros simples.

Autoavaliação

1. Se um empreendedor desejar duplicar o seu capital aplicando-o a juros compostos de 7% a.m., em quanto tempo, aproximadamente, ele teria o montante desejado?

a) 34 meses;

b) 29 meses;

c) 14 meses;

d) 10 meses.

2. Adolfo pediu um empréstimo de R$ 4.000,00 ao banco e, após 90 dias, teve que pagar R$ 6.600,00. Qual foi a taxa de juros cobrada?

a) 0,56 % a.m.;

b) 18,2 % a.m.;

c) 1,82 % a.m.;

d) 0,182 % a.m.

3. Diego recebeu do seu pai certa quantia em dinheiro e aplicou a juros simples de 20% a.a. Após 3 anos, ele resgatou a metade dos juros ganhos e aplicou por mais um ano à taxa de juros simples de 24% a.a., obtendo como rendimento R$ 102,20. O capital inicialmente aplicado por Diego foi de:

a) R$ 327,56;

b) R$ 312,19;

c) R$ 429,76;

d) R$ 500,00.

4. Francisco Carlos precisava comprar uma geladeira e viu, em uma loja, uma promoção de R$ 1000,00 à vista ou em 3 parcelas iguais, mensais e sucessivas de R$ 350,00, sem entrada. Francisco tinha os R$ 1000,00, mas optou por aplicá-lo à taxa de juros compostos de 1,5% a.m. e levar a geladeira a prazo. Assim, ele manteria o dinheiro aplicado rendendo, faria retiradas mensais para o pagamento da geladeira e levaria o produto no momento, sem gastar nada. Francisco Carlos agiu certo?

a) Sim, pois, ao final dos três meses, Francisco terá pago todas as parcelas da geladeira e com R$ 20,15 de sobra do rendimento da aplicação;

b) Não, pois, ao final dos três meses, Francisco terá apenas R$ 329,85 para sacar do montante final, valor inferior a última parcela da geladeira;

c) Sim, pois a aplicação será suficiente para pagar a geladeira, não havendo nenhuma sobra ou falta;

d) Não, pois, ao final da aplicação, Francisco terá como montante o valor de R$ 1045,68 e a geladeira custará, a prazo, R$ 1050,00.

5. Se a poupança, ao invés de remunerar a juros compostos, remunerasse a juros simples de 0,5% a.m., em quantos anos uma pessoa duplicaria o seu capital, inicialmente depositado (independente do valor)? Qual seria a melhor maneira para esta pessoa diminuir o tempo de espera do montante desejado?

a) 200 meses. Seria mais eficiente sacar o montante ao final de cada mês e depositar novamente;

b) 200 meses. Seria mais eficiente sacar o rendimento ao final de casa mês e deixar rendendo apenas sob o capital inicial;

c) 139 meses. Seria mais eficiente sacar o montante ao final de cada mês e depositar novamente;

d) 139 meses. Seria mais eficiente sacar o rendimento ao final de casa mês e deixar rendendo apenas sob o capital inicial.

Competência
03

Distinguir e aplicar
os descontos comerciais e racionais

Distinguir e aplicar

os descontos comerciais e racionais

Dividélcio está muito preocupado com uma conta que precisa pagar no valor de R$ 600,00. No dia do vencimento da conta, ele recebe dois cheques de R$ 650,00 do seu chefe, como bonificação pelo excelente trabalho que tem realizado na empresa. Os cheques são pré-datados para 60 e 90 dias. Como ele está precisando do dinheiro, urgentemente, vai ao banco descontá-los e recebe duas propostas:

Proposta 1: descontar "por fora" o cheque para 60 dias a 3% a.m. em regime composto.

Proposta 2: descontar "por fora" o cheque para 90 dias a 2,4% a.m. em regime composto.

Obviamente, Dividélcio irá optar apenas por uma das duas propostas porque não quer perder dinheiro nos dois cheques. Mas, qual será a proposta mais vantajosa?

Na competência anterior, você viu o significado de alguns termos financeiros muito usados nesta área da matemática. Eles foram necessários para você compreender com mais facilidade a aplicação dos juros simples e dos juros compostos. Agora, veja mais algumas denominações antes de partir para os cálculos e aplicações presentes nesta competência.

Título de crédito

Título de crédito é "uma permuta de bens ou valores presentes por futuros" (ZARIF, p. 1). Uma denominação muito prestigiada na Matemática Financeira para este termo é dada pelo antigo professor da Universidade de Roma, Cesare Vivante, que diz ser um "documento necessário para o exercício do direito, literal e autônomo, nele mencionado". Trata-se, portanto, de uma espécie de contrato em que vendedor e pagador assumem um acordo de compra antecipada e pagamento posterior de uma mercadoria ou prestação de serviço. Alguns dos principais títulos são os cheques, as duplicatas e as notas promissórias.

Figura 6 – Acordo financeiro
Fonte: Oliveira (2014).

Cheque

É um documento ou ordem de pagamento à vista dirigida a um banco por via de uma pessoa física ou jurídica, a qual possui uma conta bancária em favor de outrem. Caso a conta do portador do cheque não tenha dinheiro suficiente para o pagamento, torna-se um cheque sem fundo.

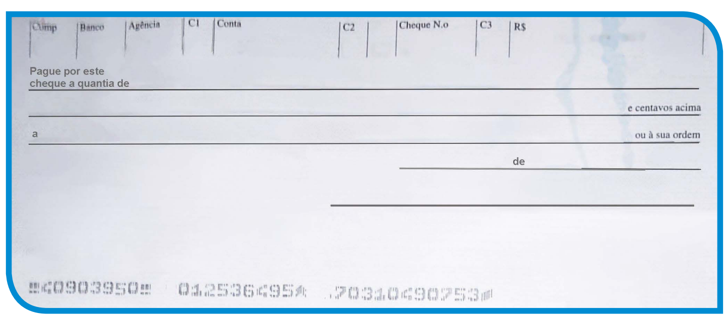


Figura 7 – Exemplo de cheque
Fonte: Oliveira (2014).

Duplicata

É uma ordem de pagamento emitida por uma pessoa jurídica contra uma pessoa física ou jurídica, que se obriga a pagar dentro do prazo por uma venda de mercadoria a prazo ou por uma prestação de serviços a ser paga no futuro, conforme o contrato.

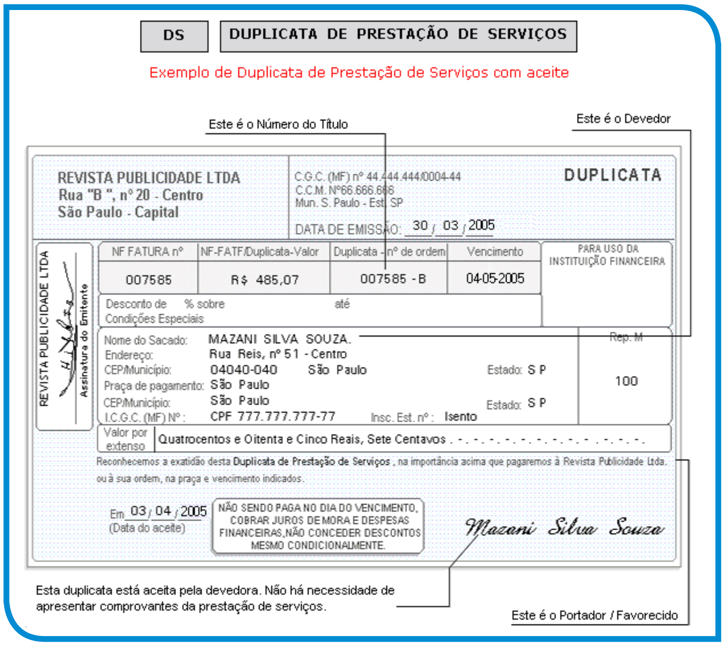


Figura 8 – Exemplo de duplicata preenchida
Fonte: Oliveira (2014).

A duplicata tem esse nome porque é uma cópia fiel, isto é, uma reprodução da fatura ou da nota fiscal emitida na compra e venda de mercadorias (SHARP, 2010, p. 27).

Nota promissória

Trata-se de uma promessa de pagamento parcelado, vinculada a um contrato. É um tipo de título muito usado entre pessoas físicas ou entre pessoas físicas e uma instituição financeira. O título é nominal, assinado pelo comprador (eminente da nota). Este documento fica de posse do vendedor (credor) que devolve ao comprador após receber o pagamento.

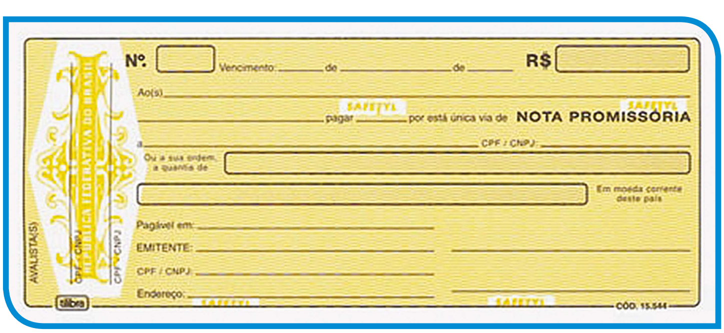


Figura 9 – Exemplo de nota promissória
Fonte: Oliveira (2014).

Agora que você já sabe o que são títulos de crédito, entenda o que pode acontecer na emissão e no pagamento destes títulos:

Situação 1: o devedor deseja pagar a parcela ou quitar a dívida antes do seu vencimento. Fazendo isto, o devedor se beneficia com uma espécie de desconto do valor da dívida. Este desconto proverá dos juros que seriam cobrados da data do pagamento antecipado até a data de vencimento da dívida. Acerca desta situação, Rodrigues e Minello (2009) explicam que a pessoa que efetuou a compra a prazo aceitou um acordo que fora feito com outrem, estipulando data(s) futura(s) de pagamento do título, ou seja, o cumprimento de um acordo. "Entretanto, a pessoa que irá realizar o pagamento não precisa esperar até a data de vencimento para efetuá-lo, podendo antecipar este pagamento, e isto irá lhe proporcionar uma recompensa, que é um desconto." (RODRIGUES; MINELLO, 2009, p. 121).

Situação 2: o credor (cobrador/vendedor) necessita do pagamento antes da data prevista, assim, ele decide vender o título de crédito a uma terceira pessoa. Como esta última pessoa está antecipando um capital futuro, obviamente, é justo que pague pelo título de crédito um valor menor do que o correspondente à dívida original. Este desconto na compra do título também proverá dos juros que seriam cobrados da data da compra do título até a data de vencimento da dívida.

Situação 3: as instituições financeiras oferecem aos seus clientes diversos tipos de aplicações. Eles "prendem" o seu dinheiro por certo tempo e, após o prazo predeterminado, você recebe o dinheiro inicialmente aplicado juntamente com os juros acumulados ao longo do tempo de aplicação. Às vezes, imprevistos acontecem e você precisa da quantia aplicada com urgência. Você, então, vai ao banco resgatar o dinheiro aplicado e recebe uma quantia menor do que receberia ao final do prazo. Um exemplo desta situação iniciou o estudo desta competência.

Perceba que, em todas as situações descritas acima, há uma espécie de benefício, ora concedida ao eminente da dívida, por estar quitando a sua dívida antecipadamente; ora concedida ao credor, por comprar uma dívida ou antecipar um pagamento. Este benefício nada mais é do que um **desconto de títulos**.

O valor futuro, isto é, a quantia total que você iria receber ou pagar após o vencimento de um título é denominado de **valor nominal**.

O valor presente, ou seja, a quantia total que você irá receber ou pagar agora, antes do vencimento do título, é denominado de **valor atual**.

Desconto = Valor nominal – Valor atual

Para que você possa aperfeiçoar sua noção de operações de descontos, leia a definição dada por Bruni (2008, p. 51):

> O verbo descontar em Matemática Financeira assume conotação específica. Descontar é retirar juros ou desconto de um valor futuro com o objetivo de obter um valor presente. Assim, descontar associa-se à ideia de trazer um capital a valor presente.

A operação de desconto pode ser realizada com taxas de juros simples ou composta, incidindo sobre o valor nominal ou sobre o valor atual, ações as quais diferenciam os tipos de descontos existentes. Veja o diagrama abaixo:

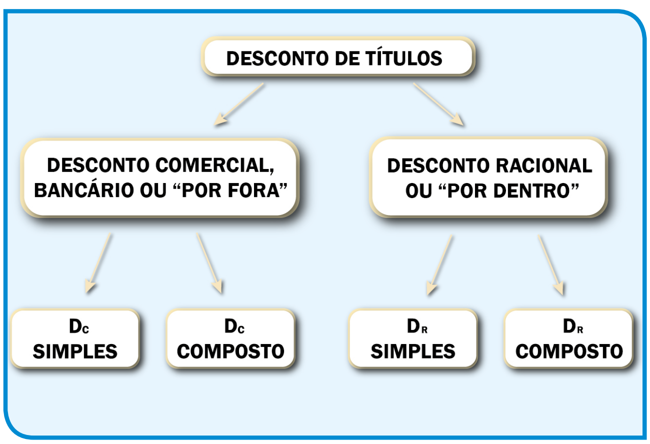
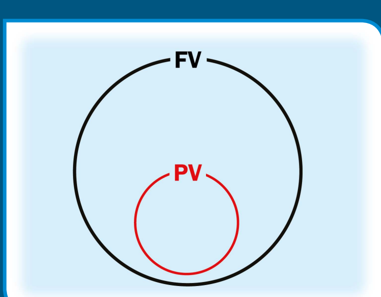


Figura 10 – Tipos de descontos de títulos
Fonte: adaptado de Schivani (2014).

Curiosidade



Fonte: <http://www.proflineu.mat.br/arqpdfsite/arqpdftemas2.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2014.

Os descontos racionais e comerciais podem ser chamados, respectivamente, de descontos “por dentro” e descontos “por fora”, por um motivo aparentemente geométrico. Nas operações de desconto, os valores nominais são sempre maiores que os valores atuais. É como se o valor atual fosse um subconjunto do valor nominal.

Para entender melhor a diferença entre juros "por dentro" e juros "por fora", suponha que você desconta, hoje, um título de R$ 10.000 com a taxa de juros compostos de 10% a.a. que vencerá em 2 anos. Qual o valor presente que você irá receber?

Na Figura 11, o círculo de dentro representa o valor presente, que é a quantia que você irá receber hoje. Se esta quantia fosse aplicada a 10% de juros ao ano, após dois anos, resultaria no valor futuro (ou valor nominal) de R$ 10.000.

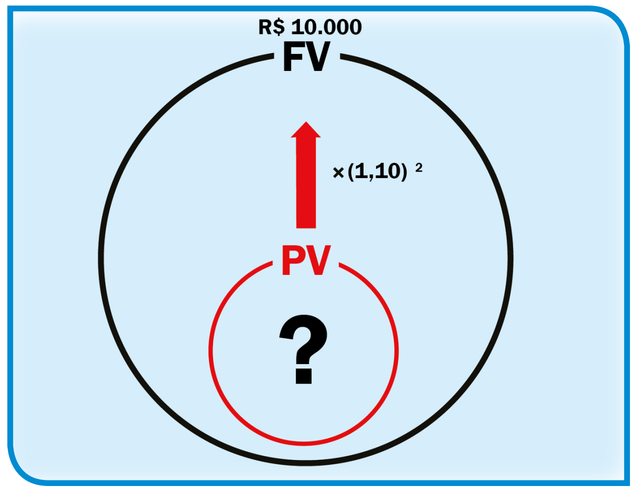


Figura 11 – Representação em diagrama do desconto por dentro ou racional
Fonte: <http://www.proflineu.mat.br/arqpdfsite/arqpdftemas2.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2014.

Logo,

$$10.000 = PV \times (1{,}10)^2$$

$$10.000 = PV \times 1{,}21$$

$$PV = \frac{10.000}{1{,}21}$$

$$PV = R\$\ 8.264{,}46$$

Observe que a taxa está incidindo no **círculo de dentro**, isto é, no valor presente, por isso este tipo de desconto é chamado de desconto "por dentro" ou ainda desconto racional.

Mas, se o valor nominal é 10% a mais que o valor presente, você provavelmente concorda que o valor presente é 10% a menos que o valor nominal, logo:

$$PV = 10.000 \times (0{,}90)^2$$

$$PV = 10.000 \times 0{,}81$$

$$PV = R\$\ 8.100$$

Observe os cálculos e a Figura 12. Não é mais a taxa de juros, mas, sim, a taxa de desconto que está sendo incidida no valor nominal, ou seja, no **círculo de fora**.

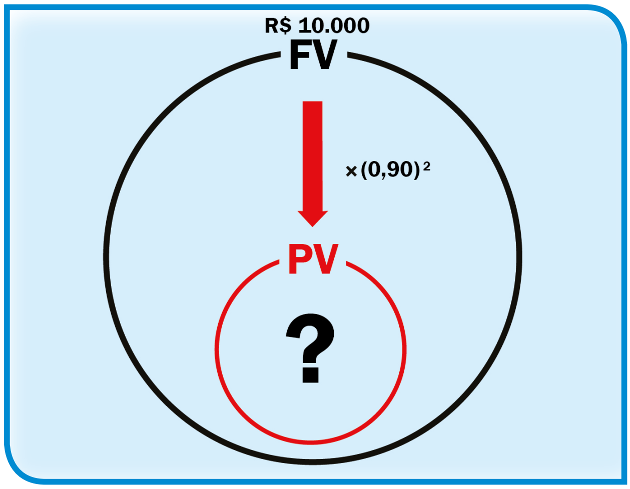


Figura 12 – Representação em diagrama do desconto por fora ou comercial
Fonte: <http://www.proflineu.mat.br/arqpdfsite/arqpdftemas2.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2014.

Este tipo de operação de desconto é denominada de desconto "por fora", comercial e bancário. Perceba também que neste tipo de desconto, o valor presente, ao ser reaplicado à mesma taxa de juros e prazo, não volta ao valor nominal original, justamente pelo fato de a taxa de desconto não ser a taxa de juros.

Os descontos simples são usados, especialmente, para prazos curtos. Já os descontos compostos restringem-se aos prazos mais longos. Os cálculos de cada tipo de desconto seguem a mesma lógica das fórmulas de juros simples e compostos, que você aprendeu na competência anterior.

Você já sabe, por exemplo, que no momento em que se faz um empréstimo ou aplica-se um dinheiro a uma taxa de juros, normalmente se está interessado em saber o montante (valor futuro) que é calculado somando-se ao capital (valor atual) à taxa e os juros, ou seja:

a juros simples:

$M = C + J$ e $J = C \times i \times n$

$M = C + (C \times i \times n)$

$M = C \times (1 + i \times n)$

a juros compostos:

$M = C \times (1 + i)^n$

No processo de descontos, a operação é realizada de forma inversa a dos juros, visto que se está interessado em saber o valor atual a receber ou pagar após a aplicação do desconto. Assim:

	Desconto racional	Desconto comercial
A juros simples	$C = \frac{M}{(1 + i \times n)}$	$C = M \times (1 - i \times n)$
A juros compostos	$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$	$C = M \times (1 - i)^n$

Quadro 5 – Juros aplicados aos descontos
Fonte: autoria própria (2014).

Lembre-se que em qualquer que seja o tipo de desconto, ele sempre será a diferença entre o valor nominal (montante) e o valor atual (capital). Fazendo este cálculo, se obtém a fórmula de cada desconto. Veja a demonstração:

Desconto racional simples (D_R)

Como o desconto é o montante subtraído do capital, tem-se inicialmente que:

$$D_R = M - C$$

Você já viu anteriormente que para calcular o montante de uma aplicação a juros simples faz-se $M = C \times (1 + i \times n)$, isolando o C, tem-se $C = \frac{M}{(1+i \times n)}$, substituindo em $D_R = M - C$, fica:

$$D_R = M - \frac{M}{(1+i \times n)}$$

Extraindo o mínimo múltiplo comum e subtraindo as duas frações acima, resolve-se a equação:

$$D_R = \frac{M \times (1+i \times n) - M}{(1+i \times n)}$$

$$D_R = \frac{M + M \times i \times n - M}{(1+i \times n)}$$

$$D_R = \frac{M \times i \times n}{(1+i \times n)}$$

Chamando de N o valor nominal, ou seja, o montante M, então o desconto racional simples é dado pela fórmula:

$$D_R = \frac{N \times i \times n}{(1+i \times n)}$$

Em que,

D_R é o desconto racional (neste caso, a juros simples)

N é o valor nominal (montante ou valor futuro)

i é a taxa de juros

n é o prazo de antecipação

Exemplo 01: você tem uma dívida no valor nominal de R$ 2.600,00 a pagar em 45 dias. Entretanto, recebe um adicional no seu salário e resolve quitar a dívida hoje, recebendo um **desconto racional** à taxa de juros **simples** de 5% a.m. Dessa forma, ao invés de R$ 2.600,00, quanto você irá pagar para quitar a dívida hoje?

Ao extrair os dados da questão, tem-se:

Valor nominal (N) = R$ 2.600,00

Taxa de juros (i) = 5% a.m.

Prazo de antecipação da divida (n) = 45 dias

Tipo de desconto: racional simples

Antes de você inserir os dados coletados na fórmula, é importante perceber se a taxa e o prazo estão na mesma medida de tempo. Neste caso, o tempo está em dias e a taxa em meses, logo, você vai precisar converter os dias para meses, usando o processo da regra de três simples aprendida na competência anterior.

$$\frac{30 \text{ dias}}{45 \text{ dias}} = \frac{1 \text{ mês}}{x \text{ meses}}$$

$$30 \text{ dias} \times x = 45 \times 1$$

$$x = \frac{45}{30}$$

$$x = 1{,}5 \text{ meses}$$

Agora você já pode calcular o desconto racional:

$$D_R = \frac{N \times i \times n}{(1 + i \times n)}$$

$$D_R = \frac{2.600 \times 0{,}05 \times 1{,}5}{(1 + 0{,}05 \times 1{,}5)}$$

$$D_R = \frac{195}{(1 + 0{,}075)}$$

$$D_R = \frac{195}{1{,}075}$$

$$D_R = R\$\ 181{,}39$$

Se o desconto da quitação da dívida foi de R$ 181,39, então, o valor que agora você irá pagar será:

2.600 – 181,39 = R$ 2.418,60

Atividade 01

Com base na resolução do exemplo anterior, use a quantia paga após o desconto, ou seja, os R$ 2.418,60 e aplique à mesma taxa de 5% a.m. durante 45 dias (prazo de término da dívida). Qual será o montante recebido? É igual ou diferente ao valor da dívida de R$ 2.600? Por que isso acontece? Discuta a solução da atividade com seus colegas no fórum.

Desconto racional composto (D_R)

A demonstração da fórmula do desconto racional composto é bem semelhante ao que você acompanhou no desconto racional simples. Como o desconto é o montante subtraído do capital, tem-se inicialmente:

$$D_R = M - C$$

Você também já viu anteriormente que para calcular o montante de uma aplicação a juros compostos faz-se $M = C \times (1 + i)^n$, isolando o C, tem-se $C = \frac{M}{(1+i)^n}$, substituindo em $D_R = M - C$, fica:

$$D_R = M - \frac{M}{(1+i)^n}$$

Colocando o M em evidência, tem-se:

$$D_R = M \times \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Chamando novamente de N o montante, então o desconto racional simples é dado pela fórmula:

$$D_R = N \times \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

D_R é desconto racional (agora, a juros compostos);

N é valor nominal (montante ou valor futuro);

i é taxa de juros;

n é prazo de antecipação.

O exemplo a seguir tem, propositalmente, os mesmos valores e situação do exemplo anterior. A escolha de usar o mesmo exemplo para situações diferentes é importante para que você possa comparar os resultados e ver as semelhanças e diferenças de cada caso. Não deixe de analisar!

Exemplo 02: você tem uma dívida no valor nominal de R$ 2.600,00 a pagar daqui a 45 dias. Entretanto, recebe um adicional no seu salário e resolve quitar a dívida hoje, recebendo um desconto racional à taxa de juros compostos de 5% a.m. Dessa forma, ao invés de R$ 2.600,00, quanto você irá pagar para quitar a dívida hoje?

Mais uma vez, têm-se:

N é R$ 2.600

i é 5% a.m.

n é 45 dias = 1,5 meses

Desconto racional composto:

$$D_R = N \times \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

$$D_R = 2.600 \times \left(1 - \frac{1}{(1+0,05)^{1,5}}\right)$$

$$D_R = 2.600 \times \left(1 - \frac{1}{(1,05)^{1,5}}\right)$$

$$D_R = 2.600 \times \left(1 - \frac{1}{1,0759}\right)$$

$$D_R = 2.600 \times (1 - 0,9294)$$

$$D_R = 2.600 \times 0,0706$$

$$D_R = 183,56$$

Assim, o valor antecipado a pagar pela dívida será de:

2600 – 183,56 = R$ 2.416,44

Note que a diferença entre o desconto racional composto e o simples, nos dois exemplos dados, é relativamente pequena. Isso porque o prazo é curto (apenas 1,5 meses). No caso dos curtos prazos, é recomendado que se use o desconto racional simples, visto que os cálculos nos descontos racionais compostos são bem mais trabalhosos e a diferença no valor final de ambos é mínima. Apenas nos prazos maiores é que é fundamental o uso do desconto racional composto.

Atividade 02

Com base na resolução do exemplo anterior, use a quantia paga após o desconto, ou seja, os R$ 2.418,60 e aplique à mesma taxa de 5% a.m. durante 45 dias (prazo de término da dívida). Qual será o montante recebido? É igual ou diferente ao valor da dívida de R$ 2.600? Por que isso acontece? Discuta a solução da atividade com seus colegas no fórum.

Desconto comercial simples (D_C) ou desconto por fora (D_F)

Os descontos comerciais possuem taxas incidentes sobre o valor nominal. Esta é a principal diferença deste desconto para o racional, o qual incide sobre o valor atual.

Seja $C = M \times (1 - i \times n)$, então:

$C = M - M \times i \times n$

Como $D = M - C$ tem-se:

$D = M - (M - M \times i \times n)$

$D = M - M + M \times i \times n$

$D = M \times i \times n$

Assim, sendo o montante o valor nominal N, o desconto comercial simples é dado pela fórmula:

$$D_c = N \times i \times n$$

Em que,

D_c é desconto comercial (simples);

N é valor nominal (valor futuro ou montante);

i é taxa de juros (simples);

n é prazo de antecipação.

Observe que a própria fórmula do desconto comercial já expressa explicitamente a incidência dos juros sobre o valor nominal, visto que a taxa é multiplicada pelo montante e pelo prazo antecipado.

Exemplo 03: qual o valor atual de uma duplicada de R$ 5.200,00 com vencimento daqui a 75 dias, que sofreu um desconto comercial simples à taxa de 1,5% a.m.?

Os dados do problema são:

N = R$ 5.200,00

n = 75 dias = 2,5 meses (lembre-se de converter o tempo para a mesma unidade da taxa)

i = 1,5% a.m.

Substituindo na fórmula do desconto comercial simples, fica:

$D_c = N \times i \times n$

$D_c = 5.200 \times 0{,}015 \times 2{,}5$

$D_c =$ R$ 195,00

Logo, o valor atual da duplicada será 5.200 – 195,00 = R$ 5.005,00.

Atividade 03

Na atividade 01, você reaplicou o valor atual da dívida a mesma taxa de juros e prazo, comparando o resultado com o valor nominal da dívida. Faça o mesmo com os dados do exemplo 3 e compare as duas situações. Em qual dos descontos (racional ou comercial) a aplicação do valor atual não resulta no mesmo valor nominal do título, embora aplicado a uma mesma taxa e prazo? Por que isso acontece? Realize, analise, compare os cálculos e discuta os resultados com seus colegas no fórum.

Desconto comercial composto (D_C) ou desconto por fora composto (D_F)

Neste caso, os descontos incidem sobre o valor nominal a regime de juros compostos. A construção da fórmula segue a mesma ideia das anteriores:

Seja $C = M \times (1 - i)^n$ e $D = M - C$, então:

$$D = M - M \times (1 - i)^n$$

$$D = M\,(1 - (1 - i)^n)$$

Trocando novamente M por N (valor nominal), pois como você viu no início desta competência, o valor futuro nos processos de descontos são denominados de valor nominal, tem-se:

$$D_c = N \times (1 - (1 - i)^n)$$

Em que,

D_c é desconto comercial (composto);

N é valor nominal (montante ou valor futuro);

i é taxa aplicada ao desconto comercial;

n é prazo de antecipação.

Exemplo 04: qual o valor atual de uma duplicada de R$ 5.200,00 com vencimento daqui a 75 dias, que sofreu um **desconto comercial** à taxa de 1,5% a.m.?

Importante

Sempre que uma questão não explicitar o regime de juros do desconto (simples ou composto), sempre considere que os juros são compostos.

Sejam:

N = R$ 5.200,00

n = 75 dias = 2,5 meses

i = 1,5% a.m.

Substituindo na fórmula do desconto comercial composto, fica:

$$D_c = N \times (1 - (1 - i)^n)$$

$$D_c = 5.200 \times (1 - (1 - 0{,}015)^{2{,}5})$$

$$D_c = 5.200 \times (1 - (0{,}985)^{2{,}5})$$

$$D_c = 5.200 \times (1 - 0{,}9629)$$

$$D_c = 5.200 \times 0{,}0371$$

$$D_c = R\$ \ 192{,}92$$

Logo, o valor atual da duplicada será:

$$5.200 - 192{,}92 = R\$ \ 5.007{,}08$$

Esta competência iniciou com a decisão do Dividélcio, lembra? Ele ainda está esperando que você o ajude a resolver seu problema.

Na proposta 1, os dados são:

Valor nominal = R$ 650,00

Taxa = 3% a.m.

Prazo antecipado = 60 dias = 2 meses

Desconto Comercial Composto

$$D_c = 650 \times (1 - (1 - 0{,}03)^2)$$

$$D_c = 650 \times (1 - (0{,}97)^2)$$

$$D_c = 650 \times (1 - 0{,}9409)$$

$$D_c = 650 \times 0{,}0591$$

$$D_c = R\$ \ 38{,}415$$

Assim:

O valor atual A = R$ 650,00 – R$ 38,415 = R$ 611,585, que será a quantia que Dividélcio receberá ao descontar o cheque.

Na proposta 2, os dados são:

Valor nominal = R$ 650,00

Taxa = 2,4% a.m.

Prazo antecipado = 90 dias = 3 meses

Desconto Comercial Composto

$$D_c = 650 \times (1 - (1 - 0{,}024)^3)$$

$$D_c = 650 \times (1 - (0{,}976)^3)$$

$$D_c = 650 \times (1 - 0{,}9297)$$

$$D_c = 650 \times 0{,}0703$$

$$D_c = R\$ \ 45{,}695$$

Assim, o valor atual A = R$ 650,00 – R$ 45,695 = R$ 604,305, que será a quantia que Dividélcio receberá ao descontar o cheque.

Dessa forma, embora a taxa de juros de desconto na primeira proposta seja maior, será mais vantajoso ao seu Dividélcio descontar o cheque de 60 dias, pois receberá R$ 7,28 a mais.

Resumo

Nesta competência, você aprofundou seus conhecimentos sobre desconto e aprendeu que descontar nem sempre significa economia de dinheiro, mas, sim, uma recompensa ou beneficio a ser concedido por aquela que te antecipa uma quantia de dinheiro, que você receberia no futuro. Ainda nesta competência, você viu que existem os descontos "por dentro", também chamados de racionais, e os descontos "por fora", também denominados de descontos comerciais ou descontos bancários. No primeiro, os juros incidem sobre o valor atual e, no segundo, sobre os valores nominais e é exatamente por este motivo que na fórmula do desconto comercial, multiplica-se a taxa pelo valor nominal. Por fim, relembrou os juros simples e compostos estudados na competência anterior para poder aplicar nos descontos, que independente de serem racionais ou comerciais, também podem ser simples ou compostos, dependendo do prazo de antecipação exposto.

Autoavaliação

1. Zípora Raquele foi a uma instituição financeira descontar um título no valor de R$ 800,00, mas só recebeu R$ 640,00 por ele. Transtornada, perguntou à instituição qual foi a taxa cobrada pelo título e o tipo de desconto, pois sabia que seu vencimento era para apenas daqui a 4 meses. A resposta da instituição financeira à Zípora foi que o desconto aplicado era do tipo comercial composto e a taxa era de, aproximadamente:

a) 6,25%;

b) 5,737%;

c) 5,425%;

d) 5%.

2. Erosvoluzia negocia 3 meses antes de vencer um título no valor de R$ 35.000 uma operação de desconto simples comercial a uma taxa de 3,5% a.m. Qual o valor do desconto?

a) R$ 31.325,00;

b) R$ 36.750,00;

c) R$ 3.675,00;

d) R$ 3.547,88.

3. Demoquiciana desconta uma duplicada com 2 meses de antecipação à taxa de juros simples de 2,5% a.m., pelo desconto “por dentro”, recebendo R$ 1.900,00. Curiosa, Demoquiciana quis descobrir o valor do desconto, que foi de:

a) R$ 1.995,00;

b) R$ 95,00;

c) R$ 90,00;

d) R$ 5,00.

4. Demoquicileide desconta uma duplicada com 2 meses de antecipação à taxa de juros simples de 2,5% a.m., pelo desconto “por fora”, recebendo R$ 1.900,00. Curiosa, Demoquicileide quis descobrir o valor do desconto, que foi de:

a) R$ 3.800,00;

b) R$ 2.000,00;

c) R$ 1.000,00;

d) R$ 100,00.

5. Cloviana precisa descontar um cheque no valor de R$ 500,00 que só vence daqui a 90 dias. O banco Grana realiza a operação para desconto bancário composto de 1% a.m. e o banco Dindin faz a operação sobre o mesmo tipo de desconto, porém, uma taxa de 12% a.a. Qual dos bancos tem a melhor proposta para Cloviana?

a) O banco Grana;

b) O banco Dindin;

c) Não há diferença entre os dois bancos, pois descontam a mesma quantia;

d) Não há diferença entre os dois bancos, pois as taxas de juros são equivalentes.

Competência 04

Construir fluxos de caixa

e decidir sobre o melhor investimento

Construir fluxos de caixa

e decidir sobre o melhor investimento

Oscarino é proprietário de um terreno de mil metros quadrados no centro da cidade. Recentemente, recebeu uma proposta de compra de uma construtora que, sabendo que o valor atual do terreno é de dois milhões de reais, propôs ao seu Oscarino comprar com quatro parcelas trimestrais de R$ 400 mil e, daqui há 1 ano, quando a construtora finalizar a obra do condomínio pretendido, entregar-lhe dois apartamentos no valor de R$ 500 mil cada. Oscarino sabe que a taxa mínima de atratividade é de 3% a.m. Sendo assim, ele está estudando se é interessante vender ou não o seu terreno neste momento. O que será que ele deve fazer para sair com vantagem financeira?

No problema do seu Oscarino, ele irá receber diferentes quantias de dinheiro em diferentes períodos de tempo. Esta movimentação de pagamentos e/ou recebimentos de dinheiro ao longo de um tempo pré-determinado é chamado de fluxo de caixa. É fácil entender a origem deste termo quando o associamos a uma caixa registradora, de onde constantemente sai e entra quantias diferentes de dinheiro.

Figura 13 – Caixa registradora
Fonte: Oliveira (2014).

Justamente pelo fato das quantias e prazos não necessariamente serem iguais, não existe uma fórmula específica que calcule o resultado (positivo ou negativo) ao final de todas as movimentações de entrada e saída de dinheiro, ao longo do tempo.

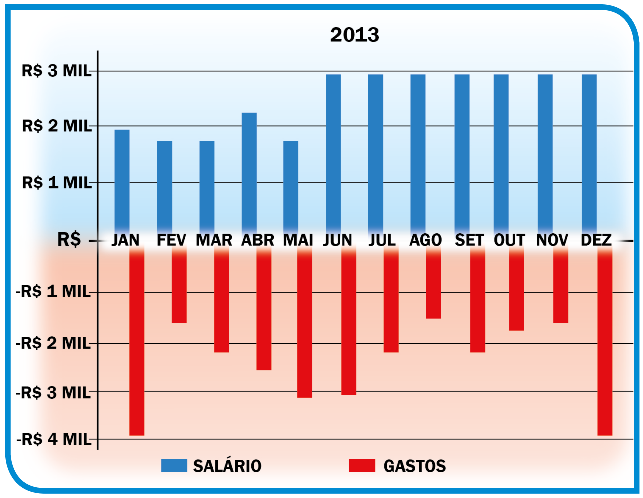


Figura 14 – Exemplo de representação de fluxo de caixa ao longo do ano de 2013, com entradas e saídas de dinheiro mensais.
Fonte: autoria própria (2014).

Observe na imagem acima que as entradas estão sendo representadas por colunas acima do eixo principal (horizontal) enquanto que as saídas de dinheiro (gastos mensais) são representadas por colunas abaixo do eixo, ditas colunas negativas.

Analogamente, os fluxos de caixa padrões são representados por setas acima ou abaixo do eixo, para cima ou para baixo, substituindo as barras da figura. Ou seja:

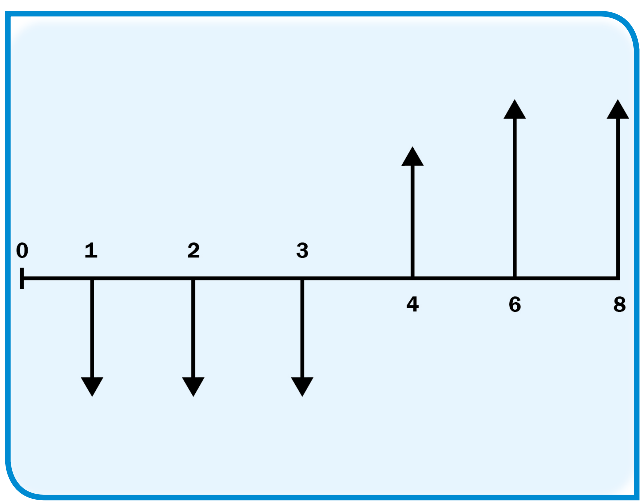


Figura 15 – Exemplo de representação gráfica de fluxo de caixa padrão
Fonte: autoria própria (2014).

As setas para cima representam as entradas de dinheiro (valores positivos). As setas para baixo representam as saídas (valores negativos). Se as setas têm tamanhos iguais, indica que houve a mesma quantia de dinheiro recebida ou paga. Setas maiores indicam quantias maiores de dinheiro.

Importante

O fluxo de caixa sempre começa no tempo zero, pois é o tempo presente (atual) em que se inicia o gasto ou recebimento de dinheiro.

Os fluxos de caixa servem, basicamente, para comparar e decidir entre investimentos e outras propostas financeiras mais vantajosas. Para tanto, se compara a soma de cada um dos pagamentos (saídas) com a soma de cada um dos recebimentos (entradas). Dado este conceito, você pode estar pensando: então, é só eu somar todas as entradas e todas as saídas e fazer a diferença entre os dois valores encontrados?

Isso estaria correto se você não tivesse a opção de aplicar o seu dinheiro. Mas, felizmente, existem as aplicações e as rentabilidades de juros, o que faz com que mil reais, hoje, por exemplo, não valha os mesmos mil reais daqui a um ano.

Para decidir, então, se um investimento em longo prazo é vantajoso ou não, calcula-se o **valor presente líquido (VPL)**, que consiste em “transportar” todas as movimentações ao longo de um determinado prazo para o tempo zero a uma taxa conhecida de juros compostos, chamada de **taxa mínima de atratividade (TMA)**. É como se você estivesse realizando um processo de desconto racional composto com todos os valores futuros que está previsto receber. O resultado de todos esses descontos menos o total investido é o **VPL** e ele pode ser de três formas diferentes:

VPL < 0	VPL = 0	VPL > 0
Quando o VPL for negativo, ou seja, menor que zero, significa dizer que o investimento não deve ser realizado, pois não trará vantagens financeiras, uma vez que o valor total presente das entradas é menor do que o valor total presente das saídas.	Se o VPL resultar em zero, o investimento é indiferente, ou seja, não vai trazer nem lucros, nem prejuízos. Isso quer dizer que o que entrou/entrará foi/será igual ao que saiu/sairá.	No caso do VPL ser positivo, isto é, maior que zero, significa que as entradas foram maiores que as saídas e, portanto, o investimento a ser realizado é dito economicamente atrativo e deve ser aceito.

Quadro 6 – Análise das variações da VPL
Fonte: autoria própria (2014).

É importante saber que para encontrar o VPL não usamos o desconto comercial, pois, como foi visto na competência anterior, se o valor presente for reaplicado à mesma taxa, não volta ao mesmo valor futuro, ou seja, não gera equivalência de capital. Esta equivalência só acontece com os descontos racionais.

Obviamente, existem inúmeras taxas que fazem com que um investimento seja atrativo. No próprio mercado financeiro, há a competição entre agências de crédito que disputam a melhor taxa de juros para chamar o cliente. Assim, se faz fundamental saber: a que taxa o VPL será nulo?

Descobrindo esta “taxa hipotética”, você saberá facilmente a partir de quando o VPL será positivo e, consequentemente, se o seu investimento será atrativo. Esta taxa é chamada de taxa interna de retorno (TIR) e, assim como o VPL, também pode ser de três formas diferentes:

TIR < TMA	TIR = TMA	TIR > TMA
Quando a taxa interna de retorno for menor que a taxa mínima de atratividade, o investimento não é viável.	No caso das duas taxas serem iguais, sua decisão é indiferente.	Quando a taxa interna de retorno for maior que a taxa mínima de atratividade, então o investimento é economicamente atrativo e, por consequência, você deve decidir por fazê-lo.

Quadro 7 – Variações da TIR
Fonte: autoria própria (2014).

Rozenfeld (2009, p. 35) afirma que “entre vários investimentos, o melhor será aquele que tiver a maior TIR”. Em suma, temos que

> [...] a partir de valores a serem pagos ou recebidos e, conhecidas as respectivas datas contratadas ou previstas, é possível calcular o valor presente líquido, a uma dada taxa. Por outro lado, quando se pretende igualar dois conjuntos de fluxos (por exemplo, entradas e saídas), na época ‘zero’, busca-se determinar a taxa que permite formar essa igualdade. Essa taxa é denominada taxa interna de retorno (PIRES, 2011, p. 80).

Atividade 01

Pesquise na Internet outras formas de representação de fluxo de caixa. Veja quais são os elementos inseridos em cada forma encontrada e compare com a forma padrão apresentada nesta competência. Discuta suas descobertas com seus colegas no fórum e veja se outras pessoas encontraram representações diferentes das suas.

Agora que você já compreendeu o que são os fluxos de caixa, para que servem e quais os métodos utilizados para saber se as movimentações resultarão em um investimento economicamente atrativo ou não, chegou o momento de conhecer o processo dos cálculos matemáticos realizados em cada um dos dois métodos apresentados: o VPL e a TIR.

Calculando o VPL

Na competência anterior, você aprendeu que os descontos são formas de resgate antecipado de um dinheiro futuro. No início da mesma competência, você viu que o capital (valor presente), no desconto racional composto era dado pela fórmula $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$, deduzida a partir da fórmula de juros compostos.

Até aqui, você já deve ter compreendido que o VPL traz para o tempo zero todos os valores futuros, transformando-os em valores presentes, assim:

$$VLP = \frac{FV_0}{(1+i)^0} + \frac{FV_1}{(1+i)^1} + \frac{FV_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{FV_n}{(1+i)^n}$$

Como qualquer número diferente de zero elevado a zero é igual a 1, então $(1 + i)^0 = 1$, logo:

$$VLP = FV_0 + \frac{FV_1}{(1+i)^1} + \frac{FV_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{FV_n}{(1+i)^n}$$

$$VPL = \sum_{t=o}^{n} \frac{FV_t}{(1+i)^t}$$

Em que:

t é o tempo de desconto de cada entrada e saída de caixa, começando do zero até o n;

n é o tempo total de desconto do fluxo de caixa;

i é a taxa de desconto composto;

FV são todos os valores futuros do fluxo de caixa, iniciando no tempo zero;

$\sum$ é o símbolo que representa o somatório de todos os descontos.

Agora que você já conhece a fórmula do cálculo, que não se distancia nem um pouco da já conhecida fórmula de desconto, acompanhe o seguinte plano de Marinalva, que pretende morar fora do país logo que terminar o seu curso de Administração, daqui a 3 anos. Para isso, precisa aplicar o seu dinheiro e ter uma boa quantia para a mudança. Então, Marinalva pretende comprar hoje um imóvel no valor de R$ 55.000,00 para obter um retorno de, no mínimo, 24% anuais. Como precisará de uma pequena reforma, ela deverá gastar cerca de R$ 3.000,00 no primeiro ano que estiver com ele. Nos próximos 2 anos, alugará por R$ 1.000,00 mensais, sendo que, neste último, ela pretende vendê-lo por R$ 60.000,00. Caso Marinalva realize o investimento, renderá os 24% pretendidos?

Observe que neste exemplo há entradas e saídas de dinheiro ao longo de 3 anos. Representando estas movimentações em um fluxo de caixa padrão, tem-se:

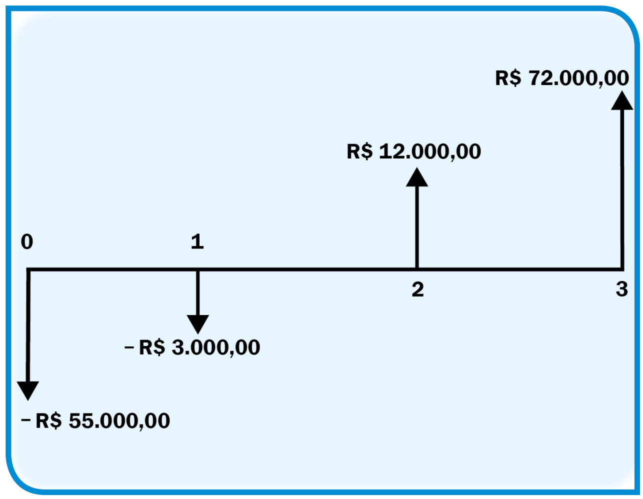


Figura 16 – Movimentações do fluxo de caixa
Fonte: autoria própria (2014).

No ano zero, tempo presente, Marinalva comprará o imóvel e, portanto, o valor investido representa uma saída de caixa. Assim, ele está inserido na seta abaixo da linha horizontal com o sinal negativo.

No primeiro ano de aquisição do imóvel, Marinalva gastará com a reforma. Assim, também tem uma saída negativa.

Já no segundo e terceiro ano, Marinalva pretende alugar o imóvel por mil reais mensais, o que resultará em R$ 12.000,00 a cada ano de aluguel.

No último ano, ainda alugado, Marinalva pretende vender o imóvel por R$ 60.000,00. Assim, tem duas entradas de capital: o valor da venda somado com o valor do aluguel, ou seja, R$ 60.000,00 + R$ 12.000,00 = R$ 72.000,00.

O rendimento mínimo pretendido, isto é, a taxa mínima de atratividade (TMA), é de 24%.

Trazendo todos os valores futuros para o presente, têm-se:

$$VLP = FV_0 + \frac{FV_1}{(1+i)^1} + \frac{FV_2}{(1+i)^2} + \frac{FV_3}{(1+i)^3}$$

$$VLP = -55.000 + \frac{-3.000}{(1+0,24)^1} + \frac{12.000}{(1+0,24)^2} + \frac{72.000}{(1+0,24)^3}$$

$$VLP = -55.000 + \frac{-3.000}{1,24} + \frac{12.000}{1,5376} + \frac{72.000}{1,906624}$$

$$VPL = -55.000 - 2.419,35 + 7.804,37 + 37.763,08$$

$$VPL = -11.851,90$$

Observe que o VPL da negociação de Marinalva está negativo. Dessa forma, pode-se concluir que o negócio não é lucrativo para ela.

Já imaginou fazer estes cálculos para prazos maiores? Com certeza teria muito trabalho manual.

Veja, nas próximas seções, como fica simples usando a calculadora financeira HP12C e/ou um *software* de planilhas eletrônicas, como o EXCEL.

Encontrando o VPL pela calculadora financeira

Antes de qualquer inserção de dados na calculadora, lembre-se de limpar sua memória pressionando os botões **f** e **CLX**.

Agora, você pode inserir os fluxos de caixa, iniciando do tempo zero até o último tempo.

Tomando como exemplo o mesmo problema de Marinalva, 55000 é o primeiro valor que se tem como investimento, ou seja, a saída de caixa no tempo zero. Portanto, este valor deve ser inserido com o sinal negativo e indicando que está no tempo zero.

O sinal negativo é inserido na calculadora financeira pressionando o botão **CHS**. O tempo zero é indicado pela função $\mathbf{CF_0}$ que quer dizer fluxo de caixa no tempo zero, esta função é ativada na calculadora pressionando os botões **g** e **PV**. Os demais valores serão inseridos no tempo correspondente, representado na calculadora financeira por $\mathbf{CF_j}$ e ativado quando pressionado os botões **g** e **PMT**.

O botão **i** corresponde a taxa e o **n** ao **NPV** (ativado pelos botões **f** e **PV**) que representa o **VPL** na HP12c.

Curiosidade

O VPL na calculadora financeira HP12c é representado pela sigla NPV. Isso porque vem do inglês *Net Present Value.*

Para o fluxo de caixa de Marinalva, você deve seguir os seguintes passos na sua calculadora financeira:

55000, CHS, g, CF$_0$ (função azul presente no botão **PV**), **3000, CHS, g, CF$_j$** (função azul presente no botão PMT), **12000, g, CF$_j$, 72000, g, CF$_j$, 24, i, f** e, por último, o botão **NPV** (função em laranja presente no botão PV).

Observe que o valor mostrado no visor da calculadora é o mesmo que você encontrou calculando manualmente. Lembrando que o sinal negativo, também exibido na calculadora, indica a inviabilidade do negócio de Marinalva.

Encontrando o VPL pelo EXCEL

Você também pode resolver a mesma questão e outras mais, usando uma planilha eletrônica, como o Excel. Basta inserir em uma coluna, os dados de entrada de forma positiva e os de saída de forma negativa, a cada período regular de tempo. Ao final de todas as inserções, use a fórmula VPL para o cálculo. Veja como é simples:

Passo 1 – Construir o fluxo em uma tabela

Baseando-se no mesmo exemplo de Marinalva, pode-se construir o seguinte fluxo:

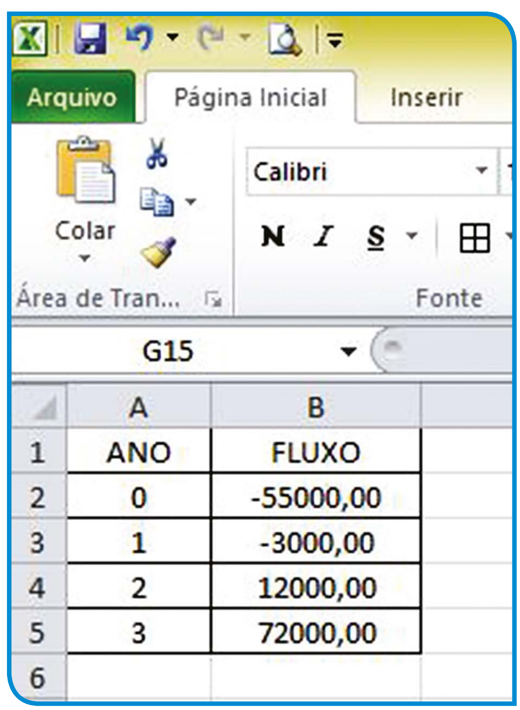


Figura 17 – Fluxo de caixa em forma de tabela no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Passo 2 – Calcular o VPL

Na célula logo abaixo do último valor inserido, digite **=VPL(**

Se você estiver trabalhando com office 2010, imediatamente surgirá um quadro abaixo da célula com a seguinte informação:

VPL (taxa; valor1; valor2; ...)

A palavra “taxa” estará em negrito, significando que você deve inserir um valor para ela. No caso do exemplo de Marinalva, a taxa é de 24%. Assim, você deve digitar 0,24.

Ao pressionar a tecla de ponto e vírgula, automaticamente “valor1” ficará em negrito, indicando que você deve inserir os valores do fluxo.

Você deve inserir tantos valores quantos forem o seu fluxo de caixa, **iniciando do tempo1**. Não se esqueça deste detalhe, pois o Excel não entende o valor zero como valor futuro, mas, sim, como valor presente que de fato é. Assim, você deve inseri-lo apenas depois de cálculo do VPL com os valores futuros.

Ao fechar o parêntese, nada mais será inserido no cálculo do VPL. Como ainda falta o valor do tempo zero, digite o sinal de soma (+) e clique na célula onde se encontra tal valor. Pressione *enter* e então terá o valor presente líquido do fluxo de caixa em questão.

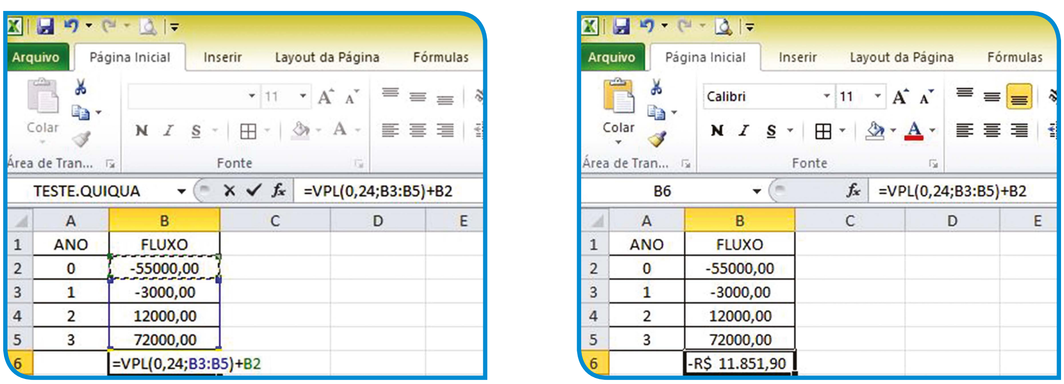


Figura 18 – Cálculo do VPL no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Atividade 02

Monte o fluxo do exemplo anterior no Excel ou outro *software* de planilhas eletrônicas e faça modificações nas taxas para ver o que acontece com o VPL. Quando a taxa mínima de atratividade aumenta, o VPL também aumenta ou diminui? A que taxa o VPL seria nulo? Será que esta taxa seria a que denominamos de taxa interna de retorno no início desta competência? Faça os testes e compartilhe os resultados com seus colegas no fórum.

O VPL também é usado na Matemática Financeira para calcular o valor mínimo que um proprietário de um imóvel deve vendê-lo para não ter prejuízos financeiros. Acerca desta situação, acompanhe o próximo exemplo de Bruno, que comprou um imóvel no valor de R$ 60.000,00 e, no mês seguinte, o alugou por R$ 300,00 e recebeu este aluguel até o terceiro mês, pois no quarto decidiu vender o imóvel. Sabendo que a TMA era de 1% a.m. qual o valor mínimo que Bruno deve cobrar pelo imóvel?

Primeiro, veja como fica a situação em um fluxo de caixa gráfico:

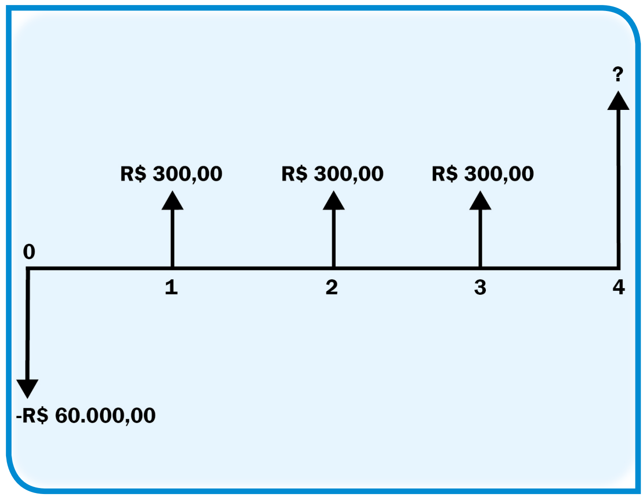


Figura 19 – Fluxo do caixa de Bruno
Fonte: autoria própria (2014).

Se não tivesse comprado o imóvel, Bruno poderia ter aplicado os seus R$ 60.000,00 a uma taxa de juros compostos de 1% a.m. Rendendo, ao final dos 4 meses, uma quantia de...

$$FV_n = PV \times (1 + i)^n$$

$$FV_4 = 60.000 \times (1{,}01)^4 = \mathbf{R\$\ 62.436{,}2406}$$

Por outro lado, cada pagamento recebido do aluguel também poderia ser aplicado a mesma taxa, rendendo ao Bruno:

$$FV_1 = 300 \times (1{,}01)^1 = 303{,}00$$

$$FV_2 = 300 \times (1{,}01)^2 = 306{,}03$$

$$FV_3 = 300 \times (1{,}01)^3 = 309{,}0903$$

$$FV_1 + FV_2 + FV_3 = 303{,}00 + 306{,}03 + 309{,}0903 = \mathbf{R\$\ 918{,}1203}$$

Dessa forma, o valor mínimo de venda do imóvel deverá ser...

R$ 62.436,2406 – R$ 918,1203 = R$ 61.518,12

Esta é uma forma de fazer equivalência de capitais, levando todas as movimentações do fluxo de caixa para o último tempo, isto é, para o futuro. Por este motivo, utiliza-se a fórmula direta dos juros.

Mas, como você já aprendeu, o VPL traz todos os valores futuros para o presente. Então, a situação de Bruno, pela fórmula do VPL, ficaria assim:

$$VLP = \frac{FV_0}{(1+i)^0} + \frac{FV_1}{(1+i)^1} + \frac{FV_2}{(1+i)^2} + \frac{FV_3}{(1+i)^3} + \frac{FV_4}{(1+i)^4}$$

$$0 = -60.000 + \frac{300}{(1+0,01)^1} + \frac{300}{(1+0,01)^2} + \frac{300}{(1+0,01)^3} + \frac{FV_4}{(1+0,01)^4}$$

Lembre-se: o que você está procurando saber é a quantia mínima que Bruno deve vender o imóvel para não ter prejuízos financeiros. Então, o VPL deve ser zero, pois no momento que isso acontece, o negócio se torna indiferente.

Para resolver esta equação, deve-se isolar o FV_4.

Assim, ficará:

$$\frac{FV_4}{(1+0,01)^4} = \left[60.000 - \frac{300}{(1+0,01)^1} - \frac{300}{(1+0,01)^2} - \frac{300}{(1+0,01)^3}\right]$$

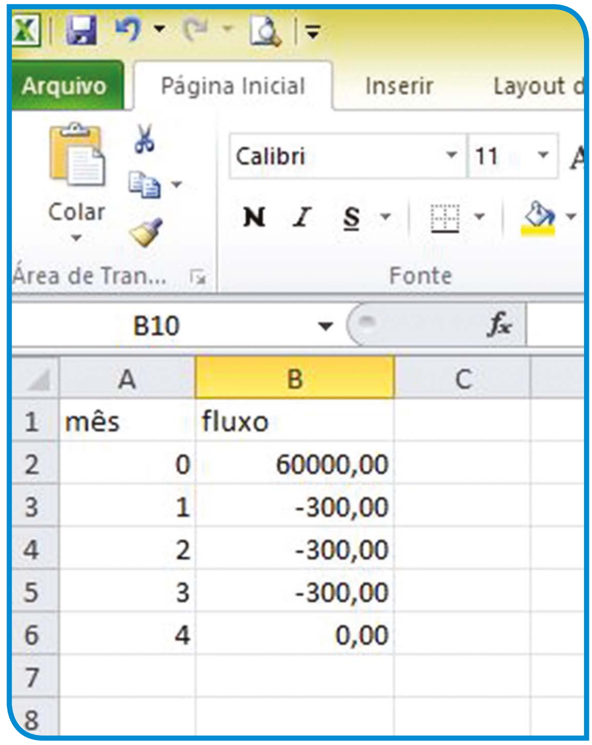
$$FV_4 = \left[60.000 - \frac{300}{(1+0,01)^1} - \frac{300}{(1+0,01)^2} - \frac{300}{(1+0,01)^3}\right] \times (1+0,01)^4$$

$$FV_4 = R\$\ 61.518,12$$

Logo, Bruno deve vender seu imóvel por, pelo menos, R$ 61.518,12.

Novamente, fazer estas contas manualmente requer muito esforço e cuidado, pois a probabilidade de erro é significativa. Então, aprenda como fazer o mesmo processo no Excel:

Passo 1 – Construir o fluxo em uma tabela



	A	B	C
1	mês	fluxo	
2	0	60000,00	
3	1	-300,00	
4	2	-300,00	
5	3	-300,00	
6	4	0,00	
7			
8			

Figura 20 – Fluxo de caixa em forma de tabela no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Observe que o sinal de menos e de mais estão trocados. Os negativos agora são as entradas e os positivos são as saídas. Isso é necessário porque o interesse agora não é saber o VPL para identificar se um negócio é atrativo ou não, mas, sim, o valor futuro que fará com que o VPL se anule. Como este valor ainda é desconhecido, você deve considerar no fluxo como sendo zero e, posteriormente, ele será o valor encontrado para o VPL, neste caso.

Passo 2 – Calculando o VPL para o valor futuro igual a zero

Na célula após o último valor do fluxo, digite:

=(VPL(0,01;B3:B6)+B2)*(1+0,01)^4

Em seguida, pressione *enter*.

Importante

Nos *softwares* de planilhas eletrônicas, ao se inserir uma fórmula é preciso tomar cuidado com os símbolos. O asterisco ***** representa multiplicação; a barra **/** representa divisão; o acento circunflexo **^** representa potência.

0,01 é a taxa de 1% do problema.

B3:B6 são todos os valores de entrada e saída do fluxo, a partir do mês 1.

B2 é onde se encontra o valor de investimento do mês 0.

A expressão *(1+0,01)^4 multiplica o VPL encontrado pela taxa no mês 4, onde retornará para o valor futuro desejado.

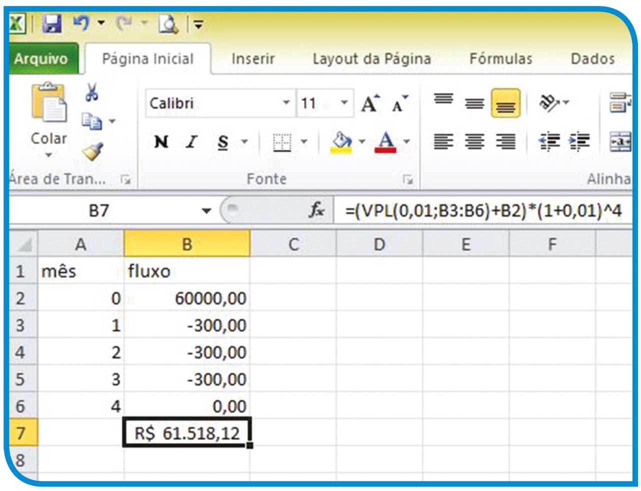


Figura 21 – Fluxo de caixa em forma de tabela no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Observe que o Excel apresenta o mesmo valor calculado antes, isto é, R$ 61.518,12.

Atividade 03

Construa uma tabela no Excel para representar o fluxo de caixa de Bruno, colocando o investimento inicial de R$ 60.000 e os pagamentos de R$ 300,00 correspondentes ao aluguel, acrescentando, também, a venda do imóvel por R$ 61.518,12. Em seguida, calcule o VPL a uma taxa mínima de atratividade de 1% a.m. e observe o resultado. Por que o VPL deu tal valor? Discuta a questão com seus colegas no fórum.

Todos os exemplos vistos até aqui foram com fluxos de capitais em períodos regulares a uma taxa na mesma unidade de tempo. No entanto, você lembra do problema do Sr. Oscarino, que iniciou esta competência? A proposta feita pela construtora a ele envolvia prazos trimestrais e anuais, além da TMA está em meses. Veja como fica o fluxo de caixa, neste caso:

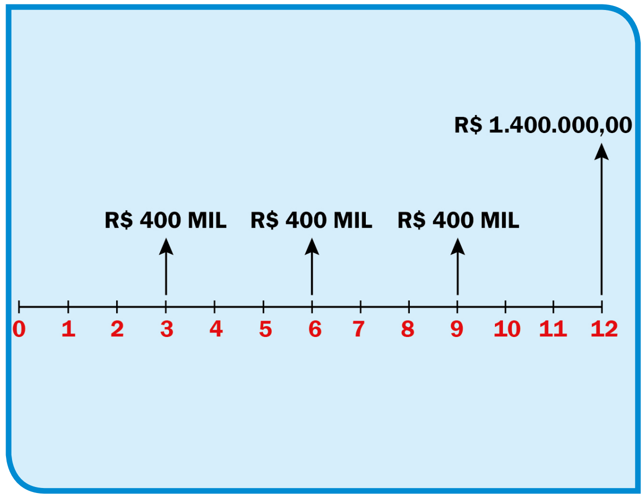


Figura 22 – Fluxo de caixa do Sr. Oscarino
Fonte: autoria própria (2014).

Na segunda competência, você aprendeu que devemos sempre operar com prazos que estejam na mesma unidade de tempo que as taxas, não o contrário. Assim, se a taxa é ao mês, os prazos necessariamente se converterão para meses. Portanto, o primeiro pagamento ao Sr. Oscarino previsto para o primeiro trimestre, ocorrerá no mês 3; o segundo no mês 6; e assim por diante.

O cálculo do VPL segue a mesma fórmula usada até aqui, porém, nos meses em que não houve fluxos de caixa, considera-se FV = 0. Assim, se você usar a calculadora financeira ou o Excel para calcular o VPL, deverá inserir o número 0 nos meses 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 e 11.

Como no mês zero, tempo presente, o Sr. Oscarino venderá (caso aceite a proposta) o seu terreno sem receber nenhum adiantamento, consideramos o valor do terreno (dois milhões de reais) como uma saída de fluxo e, portanto, negativo.

Logo, temos:

$$VLP = \frac{FV_0}{(1+i)^0} + \frac{FV_3}{(1+i)^3} + \frac{FV_6}{(1+i)^6} + \frac{FV_9}{(1+i)^9} + \frac{FV_{12}}{(1+i)^{12}}$$

$$VLP = -2.000.000 + \frac{400.000}{(1+0,03)^3} + \frac{400.000}{(1+0,03)^6} + \frac{400.000}{(1+0,03)^9} + \frac{1.400.000}{(1+0,03)^{12}}$$

$$VLP = -2.000.000 + \frac{400.000}{1,092727} + \frac{400.000}{1,1940} + \frac{400.000}{1,3048} + \frac{1.400.000}{1,42576}$$

$$VPL = -2.000.000 + 366.056,6637 + 335.008,3752 + 306.560,3924 + 981.932,443$$

$$VPL = -2.000.000 + 1.989.557,874$$

$$VPL = -R\$\ 10.442,12$$

Observe que o VPL do negócio do Sr. Oscarino é negativo, isso quer dizer que faltará R$ 10.442,12 para que o pagamento realizado pela construtora seja ao menos igual ao valor atual do terreno. Dessa forma, Sr. Oscarino não deve aceitar a proposta.

Calculando a TIR

Como você já viu nesta competência, a Taxa Interna de Retorno (TIR) é uma taxa hipotética, isto é, fictícia, a qual anula o VPL. Ela serve, basicamente, para que você possa saber a qual taxa mínima de atratividade (ou taxa de rentabilidade) deve aceitar certo investimento e assim não ficar no prejuízo.

> O critério de decisão, quando a TIR é usada para ajudar na tomada de decisão do tipo ‘aceitar-rejeitar’, é o seguinte: se a TIR for maior que o custo de capital (taxa mínima de atratividade), aceita-se o projeto; se for menor, rejeita-se o projeto. Esse critério garante que a empresa esteja obtendo, pelo menos, sua taxa requerida de retorno (PEREIRA; ALMEIDA, 2011, p. 9).

Como a TIR é a taxa que anula o VPL, então, para encontrá-la, basta resolver a equação já conhecida:

$$0 = \sum_{t=o}^{n} \frac{FV_t}{(1+ i_{RR})^t}$$

Em que:

i_{RR} é a taxa interna de retorno;

t é o tempo de desconto de cada entrada e saída de caixa, começando do *zero* até o *n*;

n é o tempo total de desconto do fluxo de caixa;

FV são todos os valores futuros do fluxo de caixa, iniciando no tempo zero;

$\sum$ é o símbolo que representa o somatório de todos os descontos.

Este cálculo é muito complexo quando feito à mão, assim, quando não auxiliados por calculadora financeira ou planilhas eletrônicas, esta taxa:

> [...] é normalmente obtida pelo processo de tentativas, isto é, arbitramos uma taxa de juros e calculamos o valor atual do fluxo de caixa para essa taxa. Se o valor atual for nulo, então a taxa utilizada para o desconto é a taxa de retorno; caso contrário, devemos arbitrar nova taxa de juros e repetir o processo até encontrar uma taxa que satisfaça essa condição (CASTANHEIRA; SERENATO, 2008. p. 108).

Na calculadora financeira, após a inserção dos fluxos de caixa, deve-se ativar a função **IRR** para calcular a taxa, pressionando os botões **f** e **FV**.

No Excel, a fórmula usada tem a própria sigla da taxa, isto é, =TIR.

Suponha que você fez hoje um financiamento de um automóvel no valor de R$ 50.000,00 para pagar em três parcelas consecutivas anuais de R$ 22.500,00, R$ 19.500,00 e R$ 12.500,00, respectivamente. Qual foi a taxa envolvida neste financiamento?

No Excel, inicialmente, você deve construir o fluxo de caixa que ficará assim:

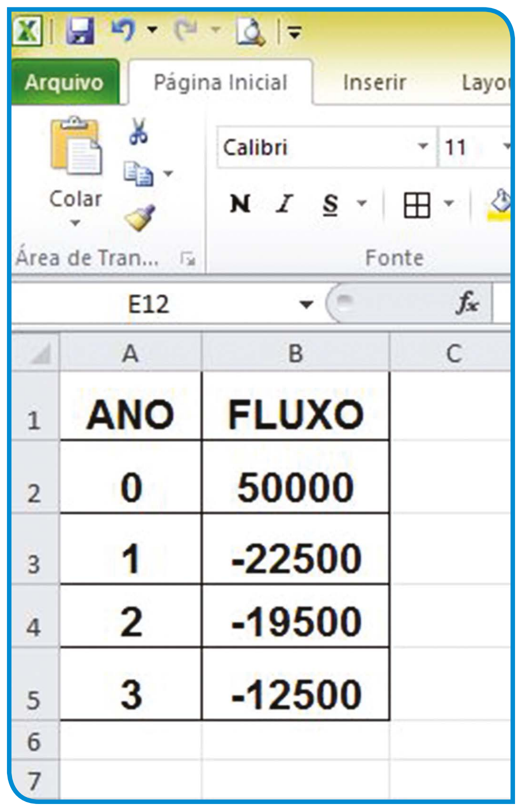


Figura 23 – Fluxo de caixa no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Para calcular a TIR, em uma célula qualquer, digite **=TIR(**

Insira os valores do fluxo, feche o parêntese e pressione *enter*. Automaticamente o Excel fornecerá o valor da taxa, que neste caso será de 4,9% a.a.

Resolvendo o mesmo exemplo com a calculadora financeira, você deve realizar o seguinte procedimento:

50000, **g**, **CF$_0$**, **22500**, **CHS**, **g**, **CF$_j$**, **19500**, **CHS**, **g**, **CF$_j$**, **12500**, **CHS**, **g**, **CF$_j$**, **f** e, por último, o botão **IRR**. E assim, o valor 4,9 aparecerá no visor da calculadora.

Resumo

Nesta competência, você aprendeu a analisar e tomar decisões no mercado financeiro de acordo com as entradas e saídas de fluxo de caixa ao longo de um tempo. Viu que os dois métodos para a tomada de decisão são dados pelo Valor Presente Líquido (VPL) e pela Taxa Interna de Retorno (TIR), ambos calculados a partir da construção de um fluxo de caixa. Dependendo do resultado desses valores, o investimento pode ser aceitável, indiferente ou inviável. Esses cálculos podem ser realizados manualmente, usando um *software* de planilhas eletrônicas, como o Excel, e/ou a calculadora financeira HP12c.

Autoavaliação

1. Analise cada afirmação a seguir e julgue por V quando for verdadeira e por F quando for falsa. Em seguida, assinale a alternativa que corresponde a sequência correta.

I - Ao analisar o VPL de uma proposta financeira, Clóvis percebeu que o resultado era negativo, dessa forma, ele deve rejeitar a proposta;

II - O VPL é nulo quando a taxa de desconto é igual a taxa interna de retorno do investimento;

III - Se o VPL for zero, deve rejeitar o investimento, visto que não será economicamente atrativo;

IV - Objetivando aumentar o Valor Presente Líquido de seu investimento, Hellen deve diminuir o valor das entradas de caixa. A sequência correta de julgamentos é:

a) V – F – V – F;

b) V – V – F – F;

c) V – V – V – V;

d) F – V – F – V.

2. Lilian ofereceu a sua irmã um estoque de produtos de beleza e garantiu que renderia R$ 200,00 no primeiro mês e, quando ela estivesse adaptada às vendas, teria o dobro deste rendimento no segundo mês. A irmã sabe que rendimentos semelhantes a que lhe foi oferecido rendem 10% a.m. Nestas condições, qual o valor máximo que a irmã deverá pagar pelo estoque de produtos, se aceitar comprá-los para revendê-los?

a) R$ 1.024,80;

b) R$ 531,45;

c) R$ 512,40;

d) R$ 488,89.

3. Um máquina de xerox de uma gráfica está quebrada, trazendo sérios prejuízos de custo e perda de clientela para a empresa, já que ela é capaz de fazer três mil cópias mensais, gerando um lucro anual de R$ 4.800,00 (já descontando os custos de energia, tinta, papel e pagamentos de funcionários). O dono da gráfica pesquisou o valor do conserto e encontrou como orçamento mais barato no valor de R$ 10.000,00 e uma garantia da fábrica de que a máquina estenderia sua vida útil por mais 4 anos. Considerando o custo de capital de 10% a.a., o dono da empresa deve...

a) Fazer a reforma da máquina, pois o VPL dos fluxos de caixa associados a esta reforma é nulo, acarretando em lucros para a gráfica;

b) Descartar a máquina, pois o VPL dos fluxos de caixa associados a esta reforma é nulo e, portanto, torna-se o investimento indiferente, não gerando lucros nem prejuízos;

c) Descartar a máquina, pois o VPL dos fluxos de caixa associados a esta reforma é negativo e, portanto, torna o investimento não atrativo, acarretando em prejuízos;

d) Fazer a reforma da máquina, pois o VPL dos fluxos de caixa associados a esta reforma é positivo, acarretando em lucros para a gráfica.

4. Arliandro emprestou ao seu amigo, Aldren, R$ 285,00 e combinou com ele que o pagamento se daria em 3 parcelas mensais, consecutivas e iguais de R$ 100,00, começando dois meses depois do empréstimo. A partir de qual taxa de retorno vale a pena o empréstimo para Arliandro?

a) Abaixo de 1,7% a.m.;

b) Igual a 1,7% a.m.;

c) Acima de 1,7% a.m.;

d) Impossível saber.

5. Acerca do valor presente líquido (VPL) e da taxa interna de retorno (TIR) é correto afirmar que:

a) Quanto maior a TIR, menor o VPL;

b) Quanto maior a TIR, maior o VPL;

c) Quanto menor a TIR, menor o VPL;

d) Não existe nenhuma relação entre a TIR e o VPL.

Competência 05

Compreender e aplicar os diversos tipos de anuidades

Compreender e aplicar os

diversos tipos de anuidades

Arquimedes quer aproveitar a redução do IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados) e comprar um Citroën no valor de R$ 24.500,00. Ao ir à concessionária, viu que não era necessário dar entrada e que a mesma disponibilizava dois tipos de contratos, dependendo da agência financeira. Na primeira agência, Arquimedes pode financiar em 60 prestações mensais iguais, a juros de 1,3% mensais e balões anuais de R$ 1.000,00. Na segunda financiadora, não é cobrado balão nenhum e a taxa de juros é a mesma. Neste caso, a prestação subiria em quantos reais se comparada com a prestação da primeira financiadora?

De modo mais simples, a anuidade é um caso particular de fluxo de caixa. Particular no sentido de que os pagamentos e/ou recebimentos não variam nem possuem prazos irregulares, ou seja, **as anuidades são fluxos de caixa contínuos, sucessivos e de iguais valores**.

Estes valores periódicos são representados na Matemática Financeira pela expressão **PMT** (abreviação da palavra *payment* que, em inglês, significa "pagamento").

Você já deve ter visto ofertas em lojas informando pagamentos de 0+5 sem juros e sem entrada, por exemplo. Ou, ainda, promoções do tipo: compre agora e só pague a primeira daqui a 90 dias. Casos como estes são exemplos de anuidades postecipadas. As anuidades podem ser **antecipadas** (com o primeiro pagamento no ato da compra ou investimento, ou seja, com entrada) ou **postecipada** (com pagamento após o primeiro mês, por exemplo, isto é, sem entrada).

Abaixo, observe uma representação genérica dos dois tipos de anuidades comentados:

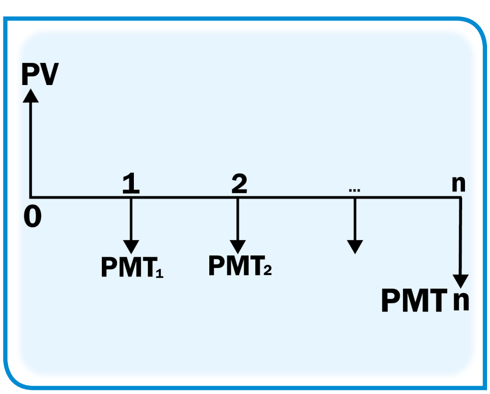


Figura 24 – Exemplo genérico de um fluxo de caixa de uma anuidade postecipada
Fonte: autoria própria (2014).

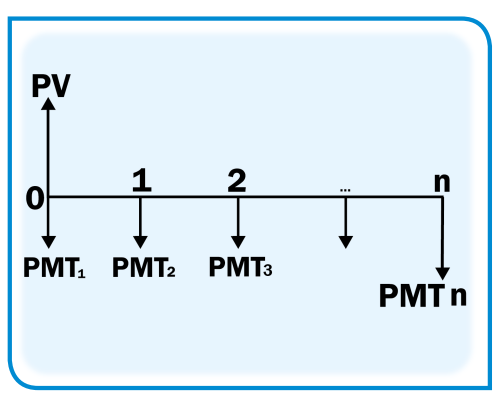


Figura 25 – Exemplo genérico de um fluxo de caixa de uma anuidade antecipada
Fonte: autoria própria (2014).

Observe que, independente do tipo de anuidade, os PMTs são sempre valores futuros em relação ao PV (valor presente). Assim, de modo completamente análogo ao cálculo do VPL que você aprendeu na competência anterior, para calcular o PV das anuidades, basta fazer o desconto racional composto de cada valor futuro, a partir de agora, representado por PMT, do fluxo de caixa. Ou seja:

$PV = PMT_1 + PMT_2 + PMT_3 + ... + PMT_n$

Aplicando o processo de desconto racional composto em cada parcela, fica:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + ... + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Colocando o PMT em evidência, já que são valores iguais, tem-se:

$$PV = PMT \times \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ ... \ + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Observe que dentro dos colchetes formou-se uma sequência de termos em que cada um deles, começando do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por $\frac{1}{(1+i)}$. Isso significa dizer que esta sequência é uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{1}{(1+i)}$ e que, para encontrar a soma de todos estes termos, basta aplicar a fórmula da soma da P.G. finita, que é:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \times q}{1 - q}$$

Em que,

a_1 é o primeiro termo

a_n é o último termo

q é a razão da P.G.

S_n é a soma dos n primeiros termos da P.G.

Usando, então, esta fórmula na sequência apresentada e aplicando uma das propriedades da potenciação para transformar as frações em potências, temos:

$$S_n = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Estrategicamente, multiplica-se o numerador e denominador da fração (assim, não se altera o resultado) por (1 + i), ficando:

$$S_n = \frac{(1+i)^{-1} \times (1+i) - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1} \times (1+i)}{1 \times (1+i) - (1+i)^{-1} \times (1+i)}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^0-(1+i)^{-n} \times (1+i)^0}{1 \times (1+i)-(1+i)^0}$$

$$S_n = \frac{1-(1+i)^{-n} \times 1}{1 \times (1+i) - 1}$$

$$S_n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$S_n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$S_n = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$S_n = \frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n} \times \frac{1}{i}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \times i}$$

Então, se o somatório das sequências de PMTs dentro dos colchetes é igual a $\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \times i}$, tem-se que o PV da anuidade é:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n-1]}{(1+i)^n \times i}$$

Quando as questões pedirem o valor futuro das anuidades, ao invés do presente, basta lembrar-se do cálculo do valor futuro a juros compostos que é feito usando a fórmula $FV = PV \times (1+i)^n$. Como $PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n-1]}{(1+i)^n \times i}$, então:

$$PV \times (1+i)^n = PMT \times \frac{[(1+i)^n-1]}{i}$$

$$FV = PMT \times \frac{[(1+i)^n-1]}{i}$$

Importante

Lembre-se que esta fórmula é usada nas anuidades postecipadas, isto é, quando não têm entradas. Mais à frente você irá aprender a fórmula, muito semelhante a esta, para as anuidades antecipadas.

A seguir, veja diferentes casos em que você pode usar a fórmula das anuidades para resolver a questão:

Exemplo 01: um computador é vendido por R$ 2.500,00 à vista ou em 0+10 com juros de 1,5% a.m. Caso o comprador opte por comprar o computador a prazo, qual será o valor que ele irá pagar em cada parcela?

Neste exemplo, pede-se o valor das parcelas, isto é, de cada PMT.

Têm-se como dados:

PV = R$ 2.500,00

i = 1,5% a.m. = 0,015

n = 10 meses

Substituindo tais valores na fórmula, fica:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n \times i}$$

$$2.500 = PMT \times \frac{[(1+0,015)^{10} - 1]}{(1+0,015)^{10} \times 0,015}$$

$$2.500 = PMT \times \frac{[(1,015)^{10} - 1]}{(1,015)^{10} \times 0,015}$$

$$2.500 = PMT \times \frac{[1,1605 - 1]}{1,1605 \times 0,015}$$

$$2.500 = PMT \times \frac{0,1615}{0,0174075}$$

$$2.500 = PMT \times 9,220164$$

$$PMT = \frac{2.500}{9,220164}$$

$$PMT = R\$\ 271,14$$

Fazer este cálculo na HP12C financeira é extremamente simples e leva poucos segundos. Veja o procedimento necessário para o mesmo exemplo:

f, **REG** (essa função limpa a memória da calculadora), **g**, **END** (indicando que o primeiro pagamento será posteriormente), **2500**, **PV**, **1,5**, **i**, **10**, **n** e, por fim, **PMT**.

E assim aparecerá no visor da calculadora o valor de R$ 271,09 negativo. O sinal refere-se ao pagamento (desembolso de dinheiro) e a diferença de centavos é por conta dos arredondamentos realizados no calculo feito à mão.

Exemplo 02: você está querendo fazer uma poupança para poder viajar nas férias do final do ano e pretende depositar todo mês a quantia de R$ 250,00. Se o rendimento é de 1% a.m., quanto você irá ter daqui a 1 ano?

Neste caso, os dados são:

PMT = R$ 250,00

n = 1 ano = 12 meses

i = 1% a.m. = 0,01

FV = ?

Logo, deve-se usar a fórmula das anuidades para encontrar o FV:

$$FV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$FV = 250 \times \frac{[(1+0,01)^{12} - 1]}{0,01}$$

$$FV = 250 \times \frac{[(1,01)^{12} - 1]}{0,01}$$

$$FV = 250 \times \frac{[1,126825 - 1]}{0,01}$$

$$FV = 250 \times \frac{0,126825}{0,01}$$

$$FV = 250 \times 12,6825$$

$$FV = R\$\ 3.170,62$$

Assim, você terá economizado R$ 3.170,62 para a sua viagem.

Veja como fica na calculadora financeira:

f, **REG**, **g**, **END**, **250**, **CHS** (aqui o 250 é negativo porque trata-se de um pagamento, mesmo que seja ao seu favor, você está desembolsando para poupar), **PMT**, **12**, **n**, **1**, **i** e, por último, **FV**. Assim, no visor da calculadora aparecerá 3.170,63.

Exemplo 03: certa caderneta de poupança rende juros mensais de 1% e você quer conseguir juntar R$ 3.000,00, depositando ao final de cada mês uma quantia de R$ 250,00. Em quantos meses vocês obterá o montante desejado?

Têm-se os seguintes dados:

PMT = R$ 250,00

FV = R$ 3.000,00

$i = 1\%$ a.m. $= 0{,}01$

$n = ?$

Assim:

$$FV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$3.000 = 250 \times \frac{[(1+0{,}01)^n - 1]}{0{,}01}$$

$$\frac{3.000}{250} = \frac{(1{,}01)^n - 1}{0{,}01}$$

$$12 = \frac{(1{,}01)^n - 1}{0{,}01}$$

$$12 \times 0{,}01 = (1{,}01)^n - 1$$

$$0{,}12 = (1{,}01)^n - 1$$

$$0{,}12 + 1 = (1{,}01)^n$$

$$1{,}12 = 1{,}01^n$$

Você lembra, na segunda competência, quando precisava descobrir o tempo de uma aplicação financeira a juros compostos, que a variável ficava no expoente e precisava usar o log em ambos os termos da equação? Aqui, usaremos o mesmo procedimento:

$$\log 1{,}12 = \log 1{,}01^n$$

$$\log 1{,}12 = n \times \log 1{,}01$$

$$n = \frac{\log 1{,}12}{\log 1{,}01} = 11{,}4 \text{ meses}$$

Atividade 01

Faça o mesmo exemplo (número 3) usando a calculadora financeira. Observe e compare o resultado encontrado com o calculado manualmente. Compartilhe sua resposta com seus colegas e veja se alguém chegou em um resultado diferente.

E se a primeira prestação for no ato da compra ou do investimento? A anuidade então deixa de ser postecipada e passa a ser antecipada. É como se você estivesse “deslocando” os PMTs para uma unidade de tempo anterior. Observe a imagem abaixo:

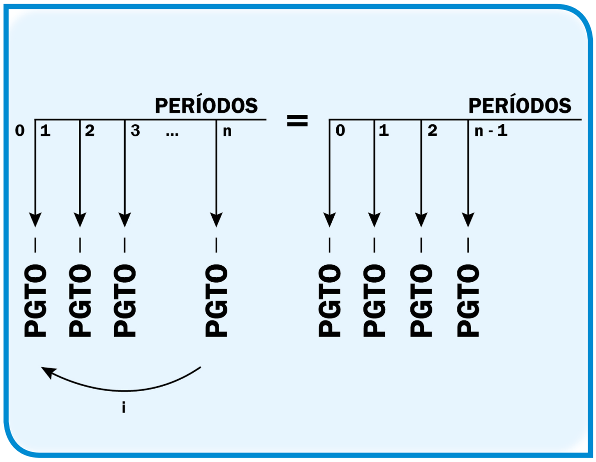


Figura 26 – Valores de pagamentos em série antecipados são iguais aos valores da postecipada descapitalizados em um período.
Fonte: Bruni (2008).

Assim, haverá um processo de desconto racional composto do PMT postecipado, cujo prazo é de uma unidade de tempo.

$$PMT_{ant} = \frac{PMT_{pos}}{(1+i)}$$

$$PMT_{ant} = \frac{\dfrac{PV}{\dfrac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n \times i}}}{(1+i)}$$

$$PMT_{ant} = \frac{PV \times \dfrac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}}{(1+i)}$$

$$PMT_{ant} = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{1}{(1+i)}$$

$$PMT_{ant} = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \times (1+i)^{-1}$$

$$PMT_{ant} = PV \times \frac{(1+i)^n \times i \times (1+i)^{-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT_{ant} = PV \times \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT_{ant} \times (1+i)^n - 1 = PV \times (1+i)^{n-1} \times i$$

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^{n-1} \times i}$$

Observe que a única mudança na fórmula da anuidade antecipada para a postecipada é que, agora, reduz o tempo em uma unidade no denominador. Veja um exemplo com a aplicação da nova fórmula:

Exemplo 04: Dona Cidalva comprou uma geladeira para a sua humilde residência no sistema 1+2 de R$ 1.000,00 a juros de 6% a.m. Se Dona Cidalva tivesse comprado à vista, quanto pagaria pela geladeira? O sistema 1+2 que se refere a questão é um exemplo de anuidade antecipada, ou seja, paga-se uma entrada de R$ 1.000,00, no ato da compra da geladeira e depois mais duas prestações consecutivas de mesmo valor.

Neste exemplo, os dados extraídos são:

PMT = R$ 1.000,00

i = 6% a.m. = 0,06

n = 3 meses

PV = ?

Aplicando na fórmula, fica:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^{n} - 1]}{(1+i)^{n-1} \times i}$$

$$PV = 1.000 \times \frac{[(1+0,06)^{3} - 1]}{(1+0,06)^{3-1} \times 0,06}$$

$$PV = 1.000 \times \frac{[(1,06)^{3} - 1]}{(1,06)^{2} \times 0,06}$$

$$PV = 1.000 \times \frac{[1,191016 - 1]}{1,1236 \times 0,06}$$

$$PV = 1.000 \times \frac{0,191016}{0,067416}$$

$$PV = 1.000 \times 2,83$$

$$PV = R\$\ 2.833,39$$

Logo, se Dona Cidalva tivesse comprado a geladeira à vista, pagaria por ela R$ 2.833,39, economizando, no mínimo, R$ 166,00.

Na calculadora financeira é preciso informar à máquina que o primeiro pagamento será feito no ato da compra. Assim, deve ativar a função **BEG** (abreviação da palavra inglesa *begin* que significa "início"). Esta função se localiza no botão de número 7 da calculadora e é ativada pressionando **g** e, na sequência, a tecla **7.** Para desativá-la, pressione **g** e a tecla **8**, onde se encontra a função **END** (também do inglês, fim).

Veja o processo para calcular a compra da Dona Cidalva, usando a calculadora financeira:

f, **REG**, **g**, **BEG**, **1.000**, **CHS**, **PMT**, **6**, **i**, **3**, **n** e, finalmente, o botão **PV**.

Curiosidade

Nem sempre o mais vantajoso é fazer uma compra à vista. Dependendo dos juros das parcelas e dos juros de rendimento de uma aplicação financeira, é mais economicamente atrativo você aplicar o dinheiro o qual faria o pagamento à vista, comprar o produto a prazo usando partes do dinheiro aplicado e, no final, ter um rendimento maior do que a economia inicial que faria comprando o produto à vista. No entanto, para tomar decisões deste tipo é fundamental o conhecimento das taxas e juros envolvidos, além de cálculos financeiros.

Observe, agora, a imagem abaixo:

Figura 27 – Proposta de venda de um automóvel
Fonte: Oliveira (2014).

Neste exemplo, a entrada não é igual ao valor das parcelas. Trata-se de um caso particular de anuidades. Quando isso acontece, usa-se a fórmula da anuidade postecipada (sem entrada) e ao final dos cálculos, soma-se o valor da entrada ao valor presente encontrado.

Suponha, por exemplo, que você tenha exatamente R$ 20,00 para dar entrada em uma caixa de som e combina com o vendedor de pagar o restante do produto em quatro prestações iguais e sucessivas de R$ 9,90 à taxa de juros de 5% a.m. Qual o valor do equipamento à vista?

Como dados, têm-se:

Entrada = R$ 20,00

PMT = R$ 9,90

n = 4 meses

i = 5% a.m. = 0,05

PV = ?

Substituindo na fórmula:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n \times i}$$

$$PV = 9,90 \times \frac{[(1+0,05)^4 - 1]}{(1+0,05)^4 \times 0,05}$$

$$PV = 9,90 \times \frac{[(1,05)^4 - 1]}{(1,05)^4 \times 0,05}$$

$$PV = 9,90 \times \frac{[1,2155 - 1]}{1,2155 \times 0,05}$$

$$PV = 9,90 \times \frac{0,2155}{0,060775}$$

$$PV = 9,90 \times 3,54586$$

$$PV = R\$\ 35,10$$

Portanto, o valor a vista será R$ 35,10 + R$ 20,00 = R$ 55,10.

Na HP12C, o cálculo é análogo ao da anuidade postecipada, não esquecendo de somar o valor da entrada após encontrar o PV.

Ainda dentro do assunto de anuidades, observe atentamente todas as formas de pagamentos apresentadas pelas duas lojas abaixo:

Fonte: <http://www.shoppingsetelagoas.com.br/uploads/abusado_cea_claca_site.jpg>. Acesso em: 04 nov. 2014.

Fonte: <http://www.riachuelo.com.br/arquivo/galeria/2012/12/4112.jpg>. Acesso em: 04 nov. 2014

Ambas as lojas fornecem prazos para iniciar o pagamento. Na segunda loja, é usado o termo **carência** na especificação de uma das propostas.

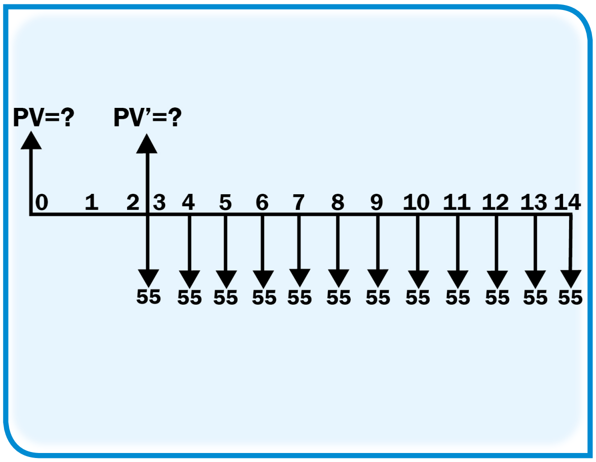
Independente do prazo ofertado para realizar o primeiro pagamento, os demais, a partir de então, serão realizados periodicamente. Você deve ter concluído em suas análises que se trata de uma anuidade postecipada, porém, com um prazo mais longo na primeira prestação (PMT). Esse prazo é chamado de carência e, embora não haja movimentação de dinheiro, há ocorrência de juros, período a período.

É muito comum as pessoas não se atentarem a presença ou não da carência e optarem por este tipo de pagamento, achando que estão ganhando tempo quando, na verdade, estão gastando mais dinheiro na compra do produto.

Acompanhe o seguinte exemplo:

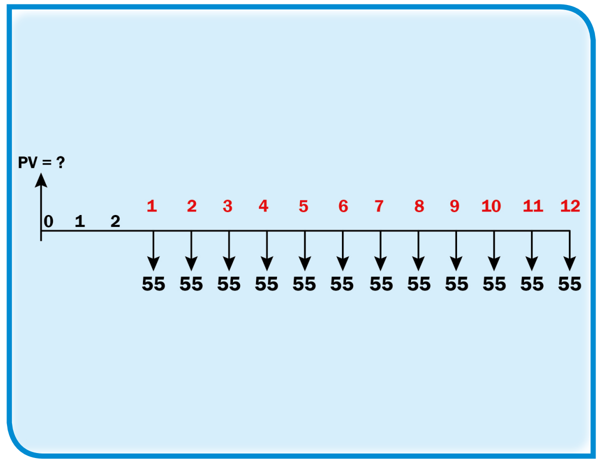
Dona Leonor, no mês de novembro, fez compras de roupas para o Natal em uma loja e parcelou tudo em doze vezes mensais e iguais à R$ 55,00, com juros de 0,5% a.m. A atendente da caixa informou à Dona Leonor que o primeiro pagamento poderia ser realizado apenas em fevereiro e, assim, Dona Leonor aceitou a proposta. Posteriormente, ela ficou pensando quanto teria economizado se tivesse recusado o tempo de carência.

Veja como o caso de Leonor pode ser esquematizado em um fluxo de caixa:



Fonte: autoria própria (2014).

Agora veja o mesmo fluxo, mas numa perspectiva de tempo diferente:



Fonte: autoria própria (2014).

Observe que há dois valores presentes, um no tempo zero e outro após o tempo de carência, no tempo 3.

Para saber o valor do guarda-roupa da Dona Leonor, é necessário calcular, inicialmente, o PV', no tempo 3, que também é o tempo 1 e só depois se calcula o PV no tempo zero.

Para o cálculo do PV' não há nenhuma fórmula que você já não conheça. O procedimento é idêntico ao cálculo da anuidade antecipada, visto que o primeiro pagamento está no momento em que termina a carência. Assim, manualmente, fica:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^{n-1} \times i}$$

$$PV = 55{,}00 \times \frac{[(1+0{,}005)^{12} - 1]}{(1+0{,}005)^{12-1} \times 0{,}005}$$

$$PV = 55{,}00 \times \frac{[(1{,}005)^{12} - 1]}{(1{,}005)^{11} \times 0{,}005}$$

$$PV = 55{,}00 \times \frac{[1{,}0617 - 1]}{1{,}0564 \times 0{,}005}$$

$$PV = 55{,}00 \times \frac{0{,}0617}{0{,}005282}$$

$$PV = 55{,}00 \times 11{,}6812$$

$$PV = R\$\ 642{,}47$$

Mas este ainda não é o valor à vista, pois houve um tempo de carência de 3 meses. Volte ao fluxo de caixa na imagem anterior e observe que o PV encontrado (R$ 642,47) corresponde ao valor futuro de uma anuidade de 3 meses. Isso quer dizer que para encontrar o PV é preciso descontar este valor futuro. Assim, basta aplicar a fórmula de desconto racional a juros compostos que você aprendeu na terceira competência:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$$PV = \frac{642{,}47}{(1+0{,}005)^3} = R\$\ 632{,}93$$

Portanto, Dona Leonor teria economizado R$ 9,54 se tivesse recusado a carência.

Para fazer os mesmos cálculos usando a calculadora financeira, o procedimento é análogo ao da anuidade antecipada seguido com o do desconto, não se esquecendo de zerar o PMT. Assim, você deve digitar na sua calculadora:

f, **REG**, **g**, **BEG**, **55**, **CHS**, **PMT**, **12**, **n**, **0,5**, **i**, **PV**, **CHS**, **FV**, **3**, **n**, **0**, **PMT** e **PV**.

E assim você deverá visualizar o valor de R$ 632,70 que, subtraído dos R$ 642,24 iniciais, resultará numa economia de R$ 9,54.

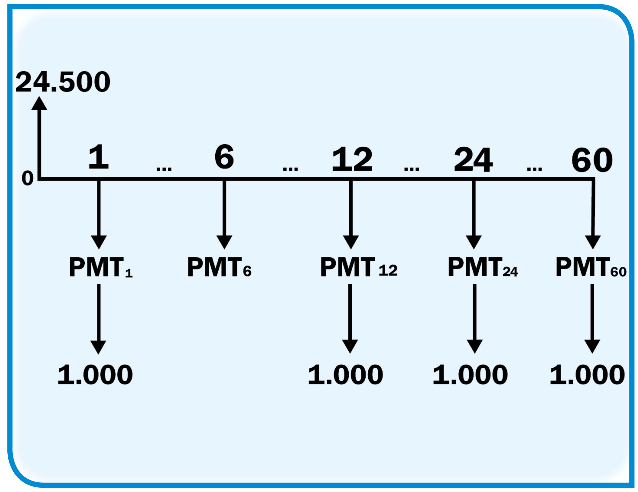
Atividade 02

No exemplo da Dona Leonor, a economia realizada, caso ela tivesse recusado a carência, fora relativamente baixa. Isso porque a taxa de juros era apenas de 0,5%. Use os mesmos valores de prazos e parcelas, alterando a taxa de juros para taxas maiores e veja o quanto a economia poderia ser maior. Discuta seus resultados com seus colegas no fórum, observando as taxas usadas por eles que forem distintas das suas.

No início desta competência, você conheceu o plano de Arquimedes em comprar um automóvel. Viu que na primeira financiadora, além das parcelas fixas anuais, eram cobrados balões anuais de mil reais. Mas, até então, nada foi falado acerca desses balões.

Os balões são parcelas intermediárias pagas ao longo de uma anuidade. Como afirma Gimenes (2006, p. 132): “podem acontecer situações em que sejam adicionadas parcelas a uma sequência uniforme de pagamentos postecipados. Isso é bem comum, sobretudo em financiamento de imóveis junto às construtoras.”

Observe como fica o esquema gráfico em um fluxo de caixa do caso do Arquimedes em relação a primeira proposta apresentada:



Fonte: autoria própria (2014).

Obviamente, ficaria inviável inserir as 60 parcelas na imagem, mas as reticências indicam as demais parcelas que não foram mostradas. O que você deve observar é que há uma anuidade em 60 pagamentos mensais consecutivos, ao mesmo tempo que há outra espécie de anuidade com 5 pagamentos anuais consecutivos, denominados de **balões**. Os descontos destes 65 pagamentos à taxa de 1,3% a.m. corresponderão ao valor presente de R$ 24.500,00.

Esteja atento, também, às unidades de tempo. A taxa está sendo cobrada ao mês, porém, têm-se pagamentos mensais e anuais.

Uma maneira simples, porém trabalhosa, de não precisar converter a taxa é, ao usar a calculadora financeira, inserir o valor zero nos meses em que não há pagamentos de balões, ou seja, você estaria convertendo o pagamento anual em mensal, para ficar na mesma unidade que a taxa, da mesma forma como foi feito em alguns exemplos da competência anterior. No entanto, no caso do seu Arquimedes, são 60 meses, dos quais 55 não há balões e, por isso, você teria que digitar 55 vezes o valor zero ao longo dos cálculos.

Surgem, então, a conversão de taxas de juros compostos. Essa conversão não pode ser realizada por meio de regra de três, como você fez com os juros simples nas primeiras competências, visto que no regime de juros compostos as taxas não são proporcionais a cada período de tempo, mas, sim, incidem sempre sobre o montante.

Para converter uma taxa de juros, que incide em uma unidade de tempo, em uma outra taxa de juros, que também incide em um mesmo período, mas em unidade de tempo distinta, de forma que as duas sejam equivalentes, faz-se:

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

Em que,

i_1 é a primeira taxa

n_1 é o período de tempo na unidade da primeira taxa

i_2 é a segunda taxa

n_2 é o período de tempo na unidade da segunda taxa

Assim, 1,3% a.m. quando transformado em taxa anual, fica:

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

$$(1 + 0{,}013)^{12} = (1 + i_2)^{1}$$

$$1{,}013^{12} = 1 + i_2$$

$$i_2 = 0{,}1676$$

Pode-se dizer, então, que 1,3% a.m. é equivalente a 16,76% a.a. em regime de juros compostos.

Agora que você já sabe qual a taxa mensal e anual cobrada pela primeira agência financeira do seu Arquimedes, já pode calcular a prestação fixa que ele deverá pagar, caso a escolha:

Os dados obtidos do exemplo são:

PV = R$ 24.500,00

n = 60 meses

i = 1,3% a.m.

Balão anual de R$ 1.000,00

n = 60 meses / 12 meses = 5 balões

i = 1,3% a.m. = 16,76% a.a.

Como há duas anuidades, então usa-se duas vezes a fórmula das anuidades postecipadas:

$$PV = PMT_1 \times \frac{[(1+i_1)^{n_1} - 1]}{(1+i_1)^{n_1} \times i_1} + PMT_2 \times \frac{[(1+i_2)^{n_2} - 1]}{(1+i_2)^{n_2} \times i_2}$$

$$24.500 = PMT_1 \times \frac{[(1+0{,}013)^{60} - 1]}{(1+0{,}013)^{60} \times 0{,}013} + 1.000 \times \frac{[(1+0{,}1676)^{5} - 1]}{(1+0{,}1676)^{5} \times 0{,}1676}$$

$$24.500 = PMT_1 \times \frac{[(1{,}013)^{60} - 1]}{(1{,}013)^{60} \times 0{,}013} + 1.000 \times \frac{[(1{,}1676)^{5} - 1]}{(1{,}1676)^{5} \times 0{,}1676}$$

$$24.500 = PMT_1 \times \frac{1{,}170535}{0{,}028217} + 1.000 \times \frac{1{,}170053}{0{,}363701}$$

$$24.500 = PMT_1 \times \frac{1{,}170535}{0{,}028217} + 3.217{,}07$$

$$24.500 - 3.217{,}07 = PMT_1 \times 41{,}4833$$

$$21.282{,}93 = PMT_1 \times 41{,}4833$$

$$PMT_1 = \frac{21.282{,}93}{41{,}4833}$$

$$PMT_1 = R\$\ 513{,}05$$

Assim, se optar pela primeira proposta, Arquimedes pagará mensalmente R$ 513,05, além dos balões anuais de R$ 1.000,00.

Na segunda proposta, não há balões, então:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n \times i}$$

$$24.500 = PMT \times \frac{[(1+0{,}013)^{60} - 1]}{(1+0{,}013)^{60} \times 0{,}013}$$

$$24.500 = PMT \times \frac{[(1{,}013)^{60} - 1]}{(1{,}013)^{60} \times 0{,}013}$$

$$24.500 = PMT \times \frac{1{,}17053}{0{,}02822}$$

$$PMT = \frac{24.500}{41{,}4787}$$

$$PMT = R\$\ 590{,}66$$

Finalmente, você descobriu que Arquimedes pagará R$ 77,55 mensais a mais se optar pela segunda proposta sem, no entanto, pagar os R$ 1.000 adicionais de balões, anualmente.

Para fazer o cálculo na financeira HP12C, você deve calcular o PV apenas para os balões, subtrair o resultado do valor total da dívida, o qual será o seu novo PV e, por fim, calcular o PMT. Veja como fica:

f, **REG**, **g**, **END**, **1000**, **CHS**, **PMT**, **16,76**, **i**, **5**, **n**, **PV**, **-**, **24500**, **ENTER** (funciona como o igual da calculadora simples), **CHS** (retira o sinal negativo do valor), **PV**, **1,3**, **i**, **60**, **n** e **PMT**.

Atividade 03

Reveja as duas propostas apresentadas ao Arquimedes e analise qual deve ser a melhor escolha: a primeira ou a segunda agência financiadora? Discuta e defenda sua conclusão com seus colegas no fórum, observando comentários divergentes aos seus.

Resumo

Nesta competência, você estudou os dois tipos de anuidades diferentes: as anuidades antecipadas, quando o primeiro pagamento é no ato da compra, e as anuidades postecipadas, quando não há entrada. Neste último, você também viu que pode haver carência, que é um período de tempo até se efetuar o primeiro pagamento, e os balões, que são parcelas intermediárias pagas junto com as prestações. Em todos os casos, as fórmulas de se calcular as prestações, o prazo, a taxa, o valor à vista ou o valor futuro de um financiamento são bem semelhantes entre si e seguem o mesmo raciocínio do cálculo do VPL, estudado na competência anterior. Excetuando-se no caso dos balões, em que obrigatoriamente deve-se fazer uma conversão na taxa para a unidade de tempo do referido pagamento, antes de usar a fórmula conhecida. Para todos os tipos de anuidades, você aprendeu uma forma mais simples e rápida de serem calculadas, usando a financeira HP12C. Pratique seus conhecimentos, agora, fazendo os exercícios que seguem.

Autoavaliação

1. Você resolveu trocar de carro, dando o seu antigo como entrada e restando R$ 10.000,00 para ser financiado. Como você só pode pagar R$ 1.000,00 por mês e os juros cobrados pela financiadora são de 2% a.m., quantas parcelas você ainda deverá pagar para quitar o veículo?

a) 9;

b) 10;

c) 11;

d) 12.

2. Você entra em uma loja de móveis e vê o guarda-roupa dos sonhos sendo vendido à vista por R$ 1.600,00. Mas como não tem o dinheiro completo para pagar, o vendedor oferta o móvel por 1+4 parcelas iguais e consecutivas a juros de 4% a.m. Quanto acabará custando este guarda-roupa ao final do pagamento de todas as parcelas?

a) R$ 1.797,02;

b) R$ 1.727,90;

c) R$ 359,40;

d) R$ 345,58.

3. Você achou que as parcelas na compra do guarda-roupa de R$ 1.600,00 iriam ficar "pesadas" para pagar agora, mas como está para ser convocada em um concurso daqui a 3 meses, pediu ao vendedor que lhe desse esse prazo para começar a pagar. Assim, o vendedor repassou o guarda-roupa à mesma taxa de juros de 4% a.m., porém, com carência de 3 meses. Assim, quanto custará o guarda-roupa, agora?

a) R$ 1.983,29;

b) R$ 1.907,01;

c) R$ 2.495,82;

d) R$ 2.476,75.

4. Seu Vitorino quer comprar um terreno no valor de R$ 12.000,00, sem dar nenhum valor na entrada e pagar em 24 vezes iguais. O dono do terreno aceita a proposta de pagamento, desde que sejam cobrados juros de 1% a.m. e sejam, também, pagos balões semestrais de R$ 600,00. Dessa forma, qual deve ser o valor de cada prestação paga pelo seu Vitorino?

a) R$ 467,35;

b) R$ 559,29;

c) R$ 564,88;

d) R$ 600,00.

5. Lamonier Charles viu em um panfleto de propaganda de certa loja que o Tablet dos seus sonhos está em promoção, podendo ser comprado por 0+10 prestações de R$ 150,00. Lamonier sabe que pode deixar o seu dinheiro aplicado na poupança, rendendo 0,4551% a.m. Com base nisso, calcula o valor máximo que essa aplicação pode lhe render e compara se vale a pena comprar o Tablet à vista, ao invés de aplicar o dinheiro. O valor encontrado por Lamonier foi de:

a) R$ 1.500,00;

b) R$ 1,469,79;

c) R$ 1.463,13;

d) R$ 1.400,00.

Competência 06

Entender, diferenciar e aplicar os diferentes tipos de amortizações

Entender, diferenciar e
aplicar os diferentes tipos de amortizações

Oscarina foi aprovada recentemente em um concurso público e está pesquisando os tipos de financiamentos disponíveis nas agências bancárias para comprar um imóvel. Na Internet, no *site* de um banco, ela encontrou um aplicativo que simula um financiamento, dando-lhe os valores de entrada, das parcelas e do prazo de pagamento ao fornecer alguns dados, como o valor do imóvel e da renda bruta mensal. Uma das opções apresentadas pelo simulador era em relação ao tipo de amortização. O cliente deve escolher entre o SAC e o SAF. Veja a imagem do aplicativo e da opção abaixo:

Figura 28 – Simulador para financiamento de imóvel
Fonte: <http://www.caixa.gov.br>. Acesso em: 04 nov. 2014.

Oscarina não sabia o que significava as siglas SAC e SAF. Procurou os significados no *site* do banco, mas não encontrou nada a respeito. E agora? Qual opção Oscarina deve escolher?

A **amortização** está intimamente ligada à aquisição de imóveis, pois são bens de alto custo e que normalmente os compradores não dispõem do valor à vista para comprá-los. Assim optam por financiamentos a longos prazos, chegando a durar mais de 25 anos de pagamentos.

No dicionário Aurélio, amortizar é definido como extinguir uma dívida aos poucos. Esse processo de extinção pode se dar de diferentes formas, por exemplo:

- **SAC** – Sistema de Amortização Constante;

- **SAF** ou **Price** – Sistema de Amortização Francês;

- **SAM** – Sistema de Amortização Mista;

- **SAA** – Sistema de Amortização Americano.

Em qualquer sistema de amortização, os juros compostos incidem sobre o saldo devedor, isto é, o quanto ainda resta pagar.

O SAA é o sistema de amortização menos usado no mercado financeiro, pois, diferentemente dos demais citados, é o único que permite o pagamento do capital emprestado de uma única vez, ao final do prazo estabelecido. Por este motivo, ele não fará parte do nosso estudo.

No SAC, como a própria sigla já indica, o valor das amortizações são sempre iguais, isto é, constantes. O que vai variar é o valor das prestações a serem pagas que, neste tipo de sistema, tendem a diminuir ao longo do período, uma vez que o juro incide sobre o saldo devedor que decresce a cada pagamento.

Veja o que aparece no simulador do banco quando Oscarina opta pelo SAC no financiamento de um imóvel novo no valor de R$ 125.000,00, com entrada de R$ 15.049,15:

Figura 29 – Simulador para financiamento de imóvel
Fonte: <http://www.caixa.gov.br>. Acesso em: 04 nov. 2014.

Observe que a primeira prestação será no valor de R$ 809,99 e as demais irão cair de modo que a 360ª será no valor de R$ 300,92.

Ao clicar na opção de detalhamento, Oscarina pode ver mais informações sobre a constituição da primeira parcela. Veja:

OPÇÕES DE PAGAMENTO - OPERAÇÕES SEM SEGURO

	COMPOSIÇÃO DA 1ª PRESTAÇÃO
1ª Prestação	R$ 809,99
Amortização	R$ 299,55
Juros	R$ 494,25
Taxa de Administração	R$ 0,00
FGHab Variável	R$ 12,22
FGHab Fixa	R$ 3,97

Figura 30 – Simulador para financiamento de imóvel
Fonte: <http://www.caixa.gov.br>. Acesso em: 04 nov. 2014.

O valor da amortização mensal, neste caso, será sempre R$ 299,55. Isso porque o valor financiado de R$ 107.837,86. Dividido pelas 360 prestações (meses), resulta em R$ 299,55 de amortização constante mensal. No entanto, ainda incidirá juros sobre o saldo devedor, o que aumentará a prestação.

No SAF, o que é constante são as prestações a serem pagas. Neste caso, como os juros irão decrescer (já que o saldo devedor está ficando cada vez menor) e as prestações serão constantes, obviamente, o valor das amortizações, como consequência, tende a aumentar ao longo do período.

Você conhece

Segundo Vallim (2011, p. 85), o Sistema de Amortização Francês (SAF) tem esse nome por ter sido elaborado na França, no século XVIII, e também pode ser chamado de Tabela Price ou simplesmente Price, por conta do seu criador, chamado Richard Price. Ainda segundo o autor, o SAF é “provavelmente, o mais popular dentre os sistemas de amortização. É amplamente adotado por instituições financeiras e pelo comércio de modo geral”.

Observe a coluna das prestações na tabela mostrada pelo simulador quando Oscarina opta pelo SAF e pelo detalhamento das parcelas:

FASE DE AMORTIZAÇÃO

Nº	VENCIMENTO	PRESTAÇÃO	SEGURO/FGHAB	TARIFAS	ENCARGO	SALDO DEVEDOR
1	05/11/2014	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.890,54
2	05/12/2014	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.780,58
3	05/01/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.670,12
4	05/02/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.559,15
5	05/03/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.447,67
6	05/04/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.335,68
7	05/05/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.223,18
8	05/06/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 99.110,16
9	05/07/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.996,62
10	05/08/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.882,56
11	05/09/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.767,98
12	05/10/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.652,88
13	05/11/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.537,25
14	05/12/2015	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.421,09
15	05/01/2016	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.304,40
16	05/02/2016	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.187,17
17	05/03/2016	R$ 567,79	R$ 11,58	R$ 0,00	R$ 579,37	R$ 98.069,40

Figura 31 – Simulador para financiamento de imóvel
Fonte: <http://www.caixa.gov.br>. Acesso em: 04 nov. 2014.

É importante que você não confunda valor da amortização com valor da prestação. A amortização é o valor periódico de abatimento do empréstimo (no caso do SAC, é obtido dividindo o valor total do empréstimo pelo número de prestações) e, como consequência, redução da dívida. Contudo, há juros incidindo no saldo devedor, assim, a prestação que você irá, de fato, pagar, será o valor da amortização (abatimento da dívida) somado com os juros do período.

Por fim, o SAM, como o próprio nome sugere, é uma mistura de sistemas de amortizações. Na verdade, trata-se da média aritmética do SAC e o SAF, ou seja, somam-se os valores obtidos pelos dois sistemas e divide por 2 para obter o SAM.

Gimenes (2006, p. 196) afirma que independente do sistema de amortização escolhido, as perguntas que interessa ao tomador são as mesmas:

1 – Qual o valor das parcelas em determinado período?

2 – Qual o saldo devedor para a quitação em cada período?

3 – Qual o valor total pago pelo tomador do empréstimo?

Atividade 01

Com base no que você compreendeu até aqui, construa uma tabela comparativa, diferenciando a progressão (crescente, decrescente ou constante) dos juros, das amortizações, das prestações, as vantagens e desvantagens entre o SAC e SAF. Divulgue sua tabela no fórum e observe as dos seus colegas.

Agora que você já entendeu o conceito de cada tipo de sistema de amortização, entenda como se dá os cálculos para obtenção dos valores em cada caso. O modo mais simples de compreender os cálculos é construindo tabelas ou planilhas eletrônicas de amortização. Propositalmente, para cada caso, você irá estudar o mesmo exemplo e com valores baixos. Desse modo, será capaz de fazer uma comparação gráfica e algébrica entre os três tipos de sistemas estudados nesta competência.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Para construir uma planilha de amortização pelo sistema SAC, inicialmente é preciso definir o valor da amortização, que neste caso é constante e obtido por meio da divisão do valor do empréstimo (V) ou financiamento pelo total de prestações (n).

$$A = \frac{V}{n}$$

Na sequência, deve-se obter os juros de cada período, que é calculado multiplicando a taxa (i) pelo saldo devedor (SD) anterior àquele período.

$$J = i \times SD$$

Por fim, o valor da prestação (P) paga será a soma da amortização (A) com os juros (J) do período.

$$P = A + J$$

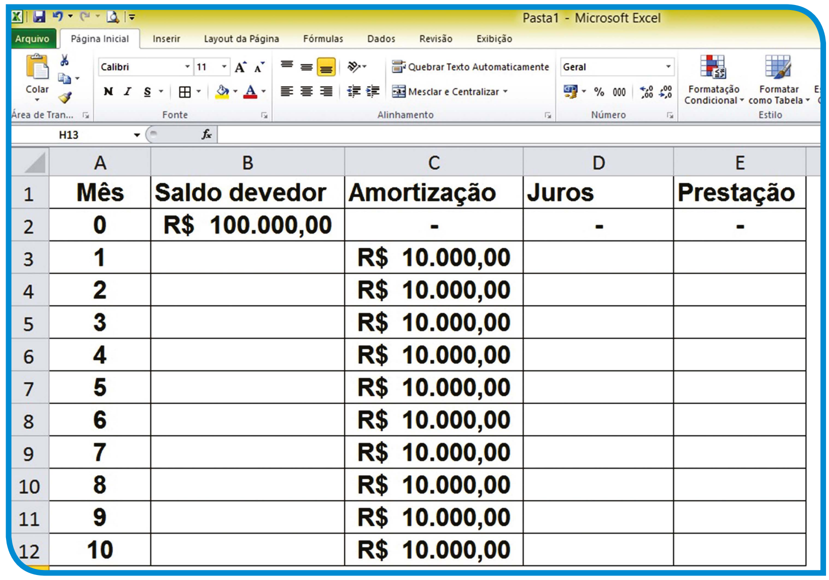
Suponha que você tome emprestados R$ 100.000,00, à taxa de 30% a.a. a ser pago em 10 prestações mensais no sistema de amortização constante.

$$A = \frac{V}{n}$$

$$A = \frac{100.000}{10}$$

$$A = R\$\ 10.000,00$$

Construindo uma planilha eletrônica no Excel, por exemplo, ela ficará inicialmente assim:

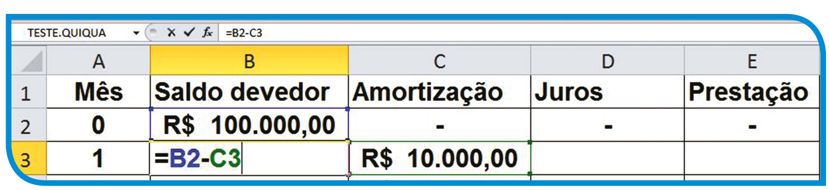


	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1		R$ 10.000,00		
4	2		R$ 10.000,00		
5	3		R$ 10.000,00		
6	4		R$ 10.000,00		
7	5		R$ 10.000,00		
8	6		R$ 10.000,00		
9	7		R$ 10.000,00		
10	8		R$ 10.000,00		
11	9		R$ 10.000,00		
12	10		R$ 10.000,00		

Figura 32 – Planilha do Excel
Fonte: autoria própria (2014).

O saldo devedor sempre reduz conforme o pagamento da amortização. Assim, deve-se subtrair deste saldo o pagamento da amortização e não da prestação.

No Excel, usa-se o símbolo de menos (–) entre as duas células que se localizam os valores a serem subtraídos. No caso do exemplo acima, deve-se digitar na célula do segundo saldo devedor o símbolo de igualdade (=) seguido do clique na célula B2 (localização do primeiro saldo devedor) – (símbolo de subtração) C3 (localização da primeira amortização) e, na sequência, pressionar *enter*.



	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1	=B2-C3	R$ 10.000,00		

Figura 33 – Calculando o primeiro saldo devedor
Fonte: autoria própria (2014).

Ao pressionar *enter* e voltar para a célula do segundo saldo devedor, observe um pequeno quadradinho no canto inferior direito da célula. Posicione o cursor do *mouse* nesse quadradinho, clique sobre ele e arraste até a última linha da tabela. Isso fará com que os demais saldos devedores sejam calculados automaticamente.

B3 fx =B2-C3

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1	R$ 90.000,00	R$ 10.000,00		
4	2	R$ 80.000,00	R$ 10.000,00		
5	3	R$ 70.000,00	R$ 10.000,00		
6	4	R$ 60.000,00	R$ 10.000,00		
7	5	R$ 50.000,00	R$ 10.000,00		
8	6	R$ 40.000,00	R$ 10.000,00		
9	7	R$ 30.000,00	R$ 10.000,00		
10	8	R$ 20.000,00	R$ 10.000,00		
11	9	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00		
12	10	R$ -	R$ 10.000,00		

Figura 34 – Calculando os demais saldos devedores no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Os juros são obtidos multiplicando a taxa pelo saldo devedor. Deve-se atentar a unidade de tempo que, neste caso, é anual para a taxa e mensal para as prestações. Logo, você não pode usar a taxa de 30% a.a. para calcular uma prestação mensal, deverá converter esta taxa, encontrando a equivalente mensal pela forma aprendida na competência anterior.

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

$$(1 + 0,3)^1 = (1 + i_2)^{12}$$

$$1,3 = (1 + i_2)^{12}$$

$$i_2 = \sqrt[12]{1,3} - 1$$

$$i_2 \approx 0,0221 = 2,21\% \text{ a.m.}$$

Portanto, a taxa a ser usada é de 2,21%. No Excel, você deve digitar na célula referente ao primeiro juros = B2 (localização do primeiro saldo devedor) * (símbolo de multiplicação) 0,0221 (valor da taxa) e pressionar *enter*. Veja como fica:

TESTE.QUIQUA fx =B2*0,0221

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1	R$ 90.000,00	R$ 10.000,00	=B2*0,0221	
4	2	R$ 80.000,00	R$ 10.000,00		

Figura 35 – Calculando os juros no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Para obter os demais juros, basta voltar à célula que se inseriu a fórmula, posicionar o cursor do *mouse* no quadradinho inferior direito, clicar e arrastar até a última linha da tabela.

	A	B	C	D	E
1	**Mês**	**Saldo devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
2	**0**	**R$ 100.000,00**	**-**	**-**	**-**
3	**1**	**R$ 90.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 2.210,00**	
4	**2**	**R$ 80.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.989,00**	
5	**3**	**R$ 70.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.768,00**	
6	**4**	**R$ 60.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.547,00**	
7	**5**	**R$ 50.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.326,00**	
8	**6**	**R$ 40.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.105,00**	
9	**7**	**R$ 30.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 884,00**	
10	**8**	**R$ 20.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 663,00**	
11	**9**	**R$ 10.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 442,00**	
12	**10**	**R$ -**	**R$ 10.000,00**	**R$ 221,00**	

Figura 36 – Calculando os demais juros no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Por fim, a prestação a ser paga no final de cada mês é a soma da amortização com os juros daquele mês. Assim, você deve digitar na célula correspondente a primeira prestação = C3 (localização da primeira amortização) + D3 (localização do primeiro juro) e pressionar *enter*.

TESTE.QUIQUA =C3+D3

	A	B	C	D	E
1	**Mês**	**Saldo devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
2	**0**	**R$ 100.000,00**	**-**	**-**	**-**
3	**1**	**R$ 90.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 2.210,00**	**=C3+D3**
4	**2**	**R$ 80.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.989,00**	
5	**3**	**R$ 70.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.768,00**	
6	**4**	**R$ 60.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.547,00**	
7	**5**	**R$ 50.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.326,00**	
8	**6**	**R$ 40.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 1.105,00**	
9	**7**	**R$ 30.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 884,00**	
10	**8**	**R$ 20.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 663,00**	
11	**9**	**R$ 10.000,00**	**R$ 10.000,00**	**R$ 442,00**	
12	**10**	**R$ -**	**R$ 10.000,00**	**R$ 221,00**	

Figura 37 – Calculando as prestações no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Repita o processo de arrastar o quadradinho inferior direito até a última linha para obter as demais prestações. Assim, a tabela de amortização para esta dívida estará concluída.

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1	R$ 90.000,00	R$ 10.000,00	R$ 2.210,00	R$ 12.210,00
4	2	R$ 80.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.989,00	R$ 11.989,00
5	3	R$ 70.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.768,00	R$ 11.768,00
6	4	R$ 60.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.547,00	R$ 11.547,00
7	5	R$ 50.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.326,00	R$ 11.326,00
8	6	R$ 40.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.105,00	R$ 11.105,00
9	7	R$ 30.000,00	R$ 10.000,00	R$ 884,00	R$ 10.884,00
10	8	R$ 20.000,00	R$ 10.000,00	R$ 663,00	R$ 10.663,00
11	9	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00	R$ 442,00	R$ 10.442,00
12	10	R$ -	R$ 10.000,00	R$ 221,00	R$ 10.221,00

Figura 38 – Tabela de amortização concluída
Fonte: autoria própria (2014).

Sistema de Amortização Francês (SAF)

Neste sistema, quem é constante é a parcela real paga ao final de cada período, ou seja, o PMT. Dessa forma, o primeiro cálculo a se fazer é do valor das parcelas usando a fórmula do PMT para anuidades postecipadas, estudado na competência anterior.

Para o mesmo exemplo de financiamento, só que agora no sistema de amortização francês, têm-se:

$$PV = PMT \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n \times i}$$

$$100.000 = PMT \times \frac{[(1+0,0221)^{10} - 1]}{(1+0,0221)^{10} \times 0,0221}$$

$$100.000 = PMT \times \frac{[(1,0221)^{10} - 1]}{(1,0221)^{10} \times 0,0221}$$

$$100.000 = PMT \times \frac{0,24432516}{0,0274996}$$

$$PMT = \frac{100.000}{8.884680504}$$

$$PMT = R\$\ 11.255,33$$

Dessa forma, as prestações reais a serem pagas, independente do valor da amortização e dos juros do período, serão sempre de R$ 11.255,33.

Para construir a planilha de amortização, você deve inserir, inicialmente, o valor das parcelas. Veja:

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1				R$ 11.255,33
4	2				R$ 11.255,33
5	3				R$ 11.255,33
6	4				R$ 11.255,33
7	5				R$ 11.255,33
8	6				R$ 11.255,33
9	7				R$ 11.255,33
10	8				R$ 11.255,33
11	9				R$ 11.255,33
12	10				R$ 11.255,33

Figura 39 – Inserindo as prestações na planilha de SAF no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

O cálculo dos juros segue o mesmo procedimento do SAC, ou seja, multiplica-se a taxa mensal pelo saldo devedor anterior. Então:

D3 =B2*0,0221

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1			R$ 2.210,00	R$ 11.255,33
4	2			R$ -	R$ 11.255,33
5	3			R$ -	R$ 11.255,33
6	4			R$ -	R$ 11.255,33
7	5			R$ -	R$ 11.255,33
8	6			R$ -	R$ 11.255,33
9	7			R$ -	R$ 11.255,33
10	8			R$ -	R$ 11.255,33
11	9			R$ -	R$ 11.255,33
12	10			R$ -	R$ 11.255,33

Figura 40 – Inserindo os juros na planilha de SAF no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

A amortização é o resultado da diferença (subtração) entre a prestação e os juros. Assim, no exemplo dado, você deve digitar na célula da primeira amortização = E3 (localização da primeira prestação) – D3 (localização do primeiro juro) e pressionar *enter*. Na sequência, volte a célula desse resultado, clique no quadradinho inferior direito e arraste até a última linha da tabela. Assim, você terá:

C3 =E3-D3

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1		R$ 9.045,33	R$ 2.210,00	R$ 11.255,33
4	2		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
5	3		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
6	4		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
7	5		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
8	6		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
9	7		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
10	8		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
11	9		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33
12	10		R$ 11.255,33	R$ -	R$ 11.255,33

Figura 41 – Inserindo as amortizações na planilha de SAF no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Finalmente, o saldo devedor será a subtração do último saldo com a amortização atual. Assim, você deve digitar na célula correspondente ao segundo saldo devedor = B2 (localização do primeiro saldo) – C3 (localização da primeira amortização) e pressionar *enter*. Na sequência, volte à célula desse resultado, clique no quadradinho inferior direito e arraste até a última linha da tabela. Assim, você terá:

B3 =B2-C3

	A	B	C	D	E
1	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	0	R$ 100.000,00	-	-	-
3	1	R$ 90.954,67	R$ 9.045,33	R$ 2.210,00	R$ 11.255,33
4	2	R$ 81.709,44	R$ 9.245,23	R$ 2.010,10	R$ 11.255,33
5	3	R$ 72.259,89	R$ 9.449,55	R$ 1.805,78	R$ 11.255,33
6	4	R$ 62.601,50	R$ 9.658,39	R$ 1.596,94	R$ 11.255,33
7	5	R$ 52.729,66	R$ 9.871,84	R$ 1.383,49	R$ 11.255,33
8	6	R$ 42.639,66	R$ 10.090,00	R$ 1.165,33	R$ 11.255,33
9	7	R$ 32.326,67	R$ 10.312,99	R$ 942,34	R$ 11.255,33
10	8	R$ 21.785,75	R$ 10.540,91	R$ 714,42	R$ 11.255,33
11	9	R$ 11.011,89	R$ 10.773,86	R$ 481,47	R$ 11.255,33
12	10	-R$ 0,08	R$ 11.011,97	R$ 243,36	R$ 11.255,33

Figura 42 –Planilha de SAF no Excel
Fonte: autoria própria (2014).

Na calculadora financeira HP12C é possível calcular o total de juros pagos até um determinado momento, bem como o saldo devedor que ainda resta ser amortizado. Este cálculo é de extrema importância ao possuidor da dívida, principalmente quando ele deseja quitar a dívida antes do término do prazo. Assim, ele retira todos os juros futuros, ficando apenas com o saldo devedor a ser pago.

Suponha, por exemplo, que no seu empréstimo de R$ 100.000,00 a ser pago em 10 parcelas, no mês 6 você é promovido no seu emprego e decide quitar todo o empréstimo. Qual será o saldo devedor, então, neste sexto mês?

Como o sistema usado aqui é o francês, não há necessidade de construir uma planilha, basta inserir os dados na calculadora financeira.

Inicialmente, você deve calcular o PMT e, na sequência, pedir os juros pagos no mês desejado e, finalmente, o saldo devedor desse mesmo mês. Veja os botões que você deve usar:

g, **END**, **100000**, **PV**, **2,21**, **i**, **10**, **n** e **PMT**

Dessa forma, o visor da calculadora irá mostrar os R$ 11.255,32 referentes às parcelas mensais.

Para saber o total de juros pagos até o sexto mês, pressione **6**, **f**, **AMORT** (está no mesmo botão que o n) e assim o visor da calculadora mostrará R$ 11.113,98 referentes, ao total de juros pagos até o sexto mês de dívida.

O saldo devedor é calculado, pressionando **RCL** e **PV**, exibindo R$ 32.326,74 restantes para ser quitado.

Atividade 02

Compare as prestações dos 10 períodos calculados no sistema de amortização constante (dado no exemplo anterior) com o sistema de amortização francês. Existe algum período de tempo em que as prestações se igualam nos dois sistemas? A partir de que momento as prestações do SAF ficam maiores que o do SAC? Com estas análises, é possível chegar a conclusão de qual dos dois sistemas é mais vantajoso? Discuta suas análises e conclusões com seus colegas no fórum.

Sistema de Amortização Mista (SAM)

Segundo Castanheira e Serenato (2008, p. 136), este sistema foi criado pelo extinto Banco Nacional de Habitação (BNH) em maio de 1979.

Como já foi falado anteriormente, neste sistema, prestações, amortizações, saldo devedor e juros são resultados da média aritmética das prestações, amortizações, saldo devedor e juros do SAC e SAF. Logo, têm-se:

$$\text{Prestação}_{\text{SAM}} = \frac{\text{Prestação}_{\text{SAC}} + \text{Prestação}_{\text{SAF}}}{2}$$

$$\text{Amortização}_{\text{SAM}} = \frac{\text{Amortização}_{\text{SAC}} + \text{Amortização}_{\text{SAF}}}{2}$$

$$\text{Saldo Devedor}_{SAM} = \frac{\text{Saldo Devedor}_{SAC} + \text{Saldo Devedor}_{SAF}}{2}$$

$$\text{Juros}_{SAM} = \frac{\text{Juros}_{SAC} + \text{Juros}_{SAF}}{2}$$

Internet

No *link* <http://www.gyplan.com/pt/amomixed_pt.html>, você encontra um aplicativo *on-line* que, ao fornecer o valor do capital emprestado (principal), o número de prestações e a taxa de juros mensais, o aplicativo calcula o total de juros e de pagamentos, bem como fornece a tabela de amortização no sistema misto. Na mesma página do *site*, logo abaixo do quadro de amortização, há opções também de calcular por outros tipos de sistemas de amortizações. Utilize ponto ao invés de vírgula para separar as casas decimais e coloque a taxa em percentual, assim como você já faz na calculadora financeira. Acesse, conheça e faça testes!

Para construir uma planilha de amortização mista no Excel é necessário que as planilhas de SAC e SAF referentes aos mesmos dados financeiros estejam disponíveis no programa.

Veja as duas planilhas de SAC e SAF que você acompanhou a construção nesta competência:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
	SAF				SAC			
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 100.000,00	-	-	-	R$ 100.000,00	-	-	-
1	R$ 90.954,67	R$ 9.045,33	R$ 2.210,00	R$ 11.255,33	R$ 90.000,00	R$ 10.000,00	R$ 2.210,00	R$ 12.210,00
2	R$ 81.709,44	R$ 9.245,23	R$ 2.010,10	R$ 11.255,33	R$ 80.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.989,00	R$ 11.989,00
3	R$ 72.259,89	R$ 9.449,55	R$ 1.805,78	R$ 11.255,33	R$ 70.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.768,00	R$ 11.768,00
4	R$ 62.601,50	R$ 9.658,39	R$ 1.596,94	R$ 11.255,33	R$ 60.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.547,00	R$ 11.547,00
5	R$ 52.729,66	R$ 9.871,84	R$ 1.383,49	R$ 11.255,33	R$ 50.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.326,00	R$ 11.326,00
6	R$ 42.639,66	R$ 10.090,00	R$ 1.165,33	R$ 11.255,33	R$ 40.000,00	R$ 10.000,00	R$ 1.105,00	R$ 11.105,00
7	R$ 32.326,67	R$ 10.312,99	R$ 942,34	R$ 11.255,33	R$ 30.000,00	R$ 10.000,00	R$ 884,00	R$ 10.884,00
8	R$ 21.785,75	R$ 10.540,91	R$ 714,42	R$ 11.255,33	R$ 20.000,00	R$ 10.000,00	R$ 663,00	R$ 10.663,00
9	R$ 11.011,89	R$ 10.773,86	R$ 481,47	R$ 11.255,33	R$ 10.000,00	R$ 10.000,00	R$ 442,00	R$ 10.442,00
10	-R$ 0,08	R$ 11.011,97	R$ 243,36	R$ 11.255,33	R$ -	R$ 10.000,00	R$ 221,00	R$ 10.221,00

Figura 43 – Planilha de SAF e SAC no Excel com mesmo capital, taxa e prazos
Fonte: autoria própria (2014).

Para construir a planilha SAF com os mesmos dados de capital, taxa e prazos, basta inserir na segunda linha do saldo devedor, a função média, ou seja, digite:

=MÉDIA(B4;F4)

Esta fórmula indica que deve ser calculada a média aritmética dos valores que se localizam nas células B4 e F4, respectivamente. Ao pressionar *enter*, o valor surgirá. Para encontrar as demais médias, basta clicar e arrastar (neste caso, para o lado e depois para baixo) o quadradinho inferior direito.

B18 fx =MÉDIA(B4;F4)

	A	B	C	D	E
14					
15	SAM				
16	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
17	0	R$ 100.000,00	-	-	-
18	1	R$ 90.477,34	R$ 9.522,67	R$ 2.210,00	R$ 11.732,67
19	2	R$ 80.854,72	R$ 9.622,62	R$ 1.999,55	R$ 11.622,17
20	3	R$ 71.129,94	R$ 9.724,78	R$ 1.786,89	R$ 11.511,67
21	4	R$ 61.300,75	R$ 9.829,19	R$ 1.571,97	R$ 11.401,17
22	5	R$ 51.364,83	R$ 9.935,92	R$ 1.354,75	R$ 11.290,67
23	6	R$ 41.319,83	R$ 10.045,00	R$ 1.135,16	R$ 11.180,17
24	7	R$ 31.163,33	R$ 10.156,50	R$ 913,17	R$ 11.069,67
25	8	R$ 20.892,88	R$ 10.270,46	R$ 688,71	R$ 10.959,17
26	9	R$ 10.505,94	R$ 10.386,93	R$ 461,73	R$ 10.848,67
27	10	-R$ 0,04	R$ 10.505,98	R$ 232,18	R$ 10.738,17

Figura 44 – Tabela do SAM no excel
Fonte: autoria própria (2014).

Atividade 03

Pesquise na Internet ou em livros didáticos de Matemática Financeira uma representação gráfica dos três sistemas de amortizações estudados nesta competência. O ideal é que seja um plano cartesiano, período X prestação, e que contenha, num mesmo plano, três retas que representem cada uma delas um dos sistemas estudados. Caso você não obtenha êxito em suas pesquisas, tente construir o seu próprio gráfico e compartilhe com seus colegas no fórum, observando as outras construções realizadas ou encontradas. Compare o crescimento e decrescimento de cada reta no plano, com os conceitos aprendidos sobre o SAC, o SAF e o SAM.

Vale ressaltar que todos os casos de movimentação financeira vistos até aqui estão desconsideradas quaisquer ajustes e correções monetárias. Contudo, como bem afirma Gimenes (2006, p. 193): “é muito difícil imaginar, no Brasil, um empréstimo feito em longo prazo sem nenhum tipo de correção, pois ainda existe inflação e uma cultura inflacionária, tanto por parte da sociedade civil quanto dos meios de produção.”

As correções realizadas ao longo de um contrato não são ilegais, mas elas são sujeitas às mudanças constantes, além dos adicionais de encargos com impostos e outros serviços. Por este motivo, você não deve considerar nenhuma correção monetária nas parcelas vistas em cada exemplo deste livro, mas deve lembrar, porém, que elas existem. Por isso, em um empréstimo real, os cálculos por você realizados irão divergir de forma relativamente pequena e inferior aos cobrados pelas agências financeiras.

Resumo

Nesta última competência, você conheceu alguns tipos de amortizações e estudou os mais conhecidos no mercado financeiro: o sistema de amortização constante (SAC), o sistema de amortização francês (SAF), também chamado de Price, e o sistema de amortização mista (SAM). Entendeu que o processo de amortização nada mais é do que o abatimento de uma dívida com pagamentos periódicos. A principal diferença entre o SAC, SAF e SAM são as parcelas reais pagas que, no caso do SAC, diminuem ao longo do tempo, no SAF são sempre iguais e no SAM é a média aritmética dos dois sistemas anteriores, e também decresce ao longo do tempo. Ainda na presente competência, aprendeu a construir planilhas eletrônicas no Excel para calcular as amortizações de todos os períodos que constituem uma dívida e usou a calculadora financeira para identificar o total de juros pagos e o saldo devedor em um determinado mês, no processo Price. Por fim, relembrou as fórmulas de cálculo das anuidades e das conversões de taxas para a solução de alguns casos de amortizações. Avalie agora o seu próprio aprendizado, resolvendo as questões que seguem.

Autoavalição

1. Mardônio quer comprar um imóvel. Para isso, toma emprestado do banco R$ 300.000,00, entregues no ato e sem carência, com cobrança de juros de 11%a.a. A restituição deverá ser feita em 5 prestações anuais pelo sistema de amortização constante. Dessa forma, quanto Mardônio deverá pagar a mais por este empréstimo?

a) R$ 99.000,00;

b) R$ 108.000,00;

c) R$ 399.000,00;

d) R$ 408.000,00.

2. Caso Mardônio optasse pelo sistema Price, utilizando a mesma taxa e prazos da questão anterior, em relação ao pagamento a mais pelo empréstimo no novo sistema:

a) Seria igual ao do SAC;

b) Seria superior ao do SAC;

c) Seria inferior ao do SAC;

d) Seria diferente ao do SAC, mas igual ao do SAM.

3. Julgue cada afirmativa a seguir com V de verdadeiro ou F de falso e na sequência, marque a alternativa correta:

( ) No sistema Price, as prestações são constantes e periódicas;

( ) Os valores do SAM é a soma dos valores do SAC e SAF;

( ) No sistema de amortização constante, as prestações reais pagas são sempre iguais;

( ) As amortizações no SAC tendem a diminuir ao longo do tempo transcorrido da dívida.

a) V – F – F – V;

b) V – F – V – F;

c) V – F – F – F;

d) F – V – V – F.

4. Avanilde contraiu uma dívida de R$ 5.500,00 com a intenção de pagar em 1 ano, acordando com a agência financiadora a cobrança de juros mensais de 1,5% e utilizando o sistema de amortização francês. Ao transcorrer 5 meses de pagamento da dívida, Avanilde conseguiu uma boa promoção no seu atual emprego, e decidiu liquidar por completo a dívida. Sendo assim, ela ainda precisará desembolsar o total de:

a) R$ 3.327,08;

b) R$ 3.208,35;

c) R$ 3.267,72;

d) R$ 2.750,00.

5. Ainda levando em consideração o caso da Avanilde apresentado na questão anterior, quanto ela terá pago de juros até o momento da liquidação total antecipada da dívida?

a) R$ 492,70;

b) R$ 467,41;

c) R$ 407,85;

d) R$ 348,28.

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2011.

BRUNI, Adriano Leal. **Matemática financeira para concursos.** São Paulo: Atlas, 2008.

CASTANHEIRA, Nelson Pereira; SERENATO, Verginia S. **Matemática financeira e análise financeira para todos os níveis**. Curitiba: Juruá, 2008.

CLICAPIAUI.COM. **Preço do tomate sobe mais e quilo chega a R$ 6,41**. [S.l.: s.n.], 08 abr. 2014. Disponível em: <http://www.clicapiaui.com/geral/75388/preco-do-tomate-sobe--mais-e-quilo-chega-a-r-641.html>. Acesso em: 04 nov. 2014.

GIMENES, Cristiano Marchi. **Matemática financeira com HP12C e Excel:** uma abordagem descomplicada. São Paulo: Person Prentice Hall, 2006.

MINELLO, Roberto; RODRIGUES, Marcelo. **Matemática financeira e comercial**. Rio de Janeiro: Ferreira, 2009.

OLIVEIRA, Rafael Eufrásio de. **Banco de imagens e ilustrações itb**. Natal: ITB, 2014. Somente il.

PEREIRA, Warley Augusto; ALMEIDA, Lindomar da Silva. **Método manual para cálculo da taxa interna de retorno**. [S.l.: s. n.], [20--?]. Disponível em: <http://www.faculdadeobjetivo.com.br/arquivos/MetodoManual.pdf>. Acesso em: 04 nov. 2014.

PIRES, Lúcio Magno. **Matemática financeira com uso do Excel e HP12C**. Brasília: SENAC, 2011.

ROZENFELD, Henrique. **Análise de viabilidade econômica**. Portal de conhecimentos: USP, 2009. Disponível em: <http://www.portaldeconhecimentos.org.br/index.php/por/content/view/full/9502> Acesso em: 21 set. 2014.

SHARP, Ronald. **Títulos de crédito**. [S.l.: s. n.], 2010. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/Ronaldslides/ttulos-de-crdito-bndes-3113855> Acesso em: 18 set. 2014.

VALLIM, Marco Aurélio. **Matemática financeira:** uma abordagem prática utilizando a HP-12C. São Paulo: LCTE, 2011.

ZARIF, Antônio Carlos. **Título de crédito**. [S.l.: s. n.]. Disponível em: <http://www.uberaba.mg.gov.br/portal/acervo/procon/legislacao/federal/TITULO_DE_CREDITO.pdf> Acesso em: 18 set. 2014.

Conheça o autor

Juliana Schivani

Juliana nasceu em Vicente de Carvalho, município de Guarujá, São Paulo, mas passou toda a sua infância e adolescência em Natal, Rio Grande do Norte. Iniciou o curso de Estatística na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) em 2007, mas em 2010 mudou para o curso de Licenciatura em Matemática, se tornando professora em 2012. Foi bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e colaboradora da Sociedade Brasileira de Matemática (SBEM-RN), onde ajudou a coordenar o III Encontro Regional de Educação Matemática (EREM). Trabalhou no ensino fundamental de forma diferenciada na Escola Freinet, gravou videoaulas para o Instituto Metrópole Digital (IMD) e, desde 2012, é professora do Instituto Técnico Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN). É especialista em Ensino de Língua Portuguesa e Matemática pelo IFRN e mestranda no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela UFRN. Seu maior interesse é na área de Educação Matemática, envolvendo Modelagem Matemática, Resolução de problemas, Tecnologias de Informação e Comunicação e Educação a Distância.

ISBN 978-85-68100-37-0

INSTITUTO
TECNOLÓGICO
BRASILEIRO