

João Baptista Bayão Ribeiro

TELECOMUNICAÇÕES

6º Volume

1ª Edição

Rio de Janeiro

J. B. Bayão

2013

Curriculum do Autor

João Baptista Bayão Ribeiro é formado em Engenharia de Telecomunicações pela UFF (Universidade Federal Fluminense) em 1971. Trabalhou na Philips do Brasil como Engenheiro Instalador, na Divisão de Equipamentos Científicos e Industriais e simultaneamente como professor da UFF em tempo parcial. Depois ingressou no Laboratório de Desenvolvimento da antiga Telerj, onde trabalhou em Normas Técnica de Operação e de Sistemas. É pós-graduado em Engenharia Elétrica pelo COPPE-UFRJ, onde obteve o título de MsC em 1979. Na década de 80 trabalhou no CpqD em Campinas, na especificação do projeto Trópico, como Engenheiro da Telecom, de S. Paulo. De volta à Telerj, trabalhou no Planejamento de Redes Telefônicas e de Dados. Fez inúmeros trabalhos para a antiga Telebrás, tendo participado ativamente do processo de digitalização do Sistema Telefônico no Brasil. Participou de vários Congressos e foi Professor em várias turmas de técnicos e engenheiros do SBT no Centro Nacional de Treinamento da Telebrás, em Brasília. Aposentou-se como professor em DE pela Escola de Engenharia da UFF, onde lecionou por vários anos após a privatização do Sistema Telebrás e extinção da antiga Telerj. Foi também Professor Substituto no IME, e Professor do curso à distância “Tecnologias Modernas de Telecomunicações”, promovido pelo Centro de Estudos de Pessoal (CEP) do Exército Brasileiro em convênio com a UFF.

Sumário

No Volume 6 apresentamos ao estudante de engenharia de Telecomunicações, alguns aspectos adicionais relativos a Modulação Digital de Sinais, em particular a modulação Multinível.

Palavras Chave

Modulação Digital, Multinível, MPSK, MFSK, QAM, MQAM, Eficiência Espectral.

Direitos Autorais

Este documento é protegido por Copyright © 2010 por seu autor listado abaixo. Você pode distribuir e/ou modificar este trabalho, tanto sob os termos da Licença Pública Geral GNU (<http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>), versão 3 ou posterior, ou da Licença de Atribuição Creative Commons (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>), versão 3.0 ou posterior.

Autor: João Baptista Bayão Ribeiro

Feedback: jribeiro@telecom.uff.br

Índice

INTRODUÇÃO.....	6
VISÃO VETORIAL DA SINALIZAÇÃO MPSK.....	8
VISÃO VETORIAL DA SINALIZAÇÃO MFSK.....	9
DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA SISTEMAS M-ÁRIOS ($M > 2$).....	12
DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MPSK.....	12
DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MFSK.....	14
PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT VERSUS PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MPSK.....	16
PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT VERSUS PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MFSK.....	17
MODULAÇÃO QPSK.....	18
MODULAÇÃO MQAM.....	20
PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MQAM.....	24
EFICIÊNCIA ESPECTRAL DE MODULAÇÕES M-ÁRIAS.....	26
LARGURA DE BANDA DE NYQUIST.....	26
EFICIÊNCIA ESPECTRAL.....	27
EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MPSK.....	28
EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MFSK.....	29
EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MQAM.....	30
RESUMO.....	31
EXERCÍCIOS.....	32
EXERCÍCIOS - SOLUÇÃO.....	35

INTRODUÇÃO

Na sinalização M-ária, a mensagem é constituída por palavras de comprimento k bits. O modulador produz $M=2^k$ formas de onda. O caso binário é um caso particular onde $k=1$.

De um modo geral, os sistemas M-ários dividem-se entre aqueles onde a dimensão é expandida na frequência, como o MFSK, e aqueles onde a expansão é realizada na fase, como os sistemas MPSK.

No primeiro caso, do MFSK, é comum utilizar-se o espaçamento mínimo entre frequências para que haja ortogonalidade entre as formas de onda do sinal modulado, durante o tempo de um símbolo, T , e nesse caso os sistemas são chamados ortogonais. Este espaçamento na frequência corresponde a $1/T$, para sistemas não coerentes, e $1/2T$ para sistemas coerentes.

De um modo geral, há uma distinção clara entre o comportamento de sistemas ortogonais, tais como MFSK, e o de sistemas de múltipla fase, como o MPSK.

Os sistemas ortogonais tendem a aumentar a largura de banda de transmissão com o aumento de k , e melhorar o desempenho em relação à taxa de erro de bits, para uma dada relação sinal/ruído normalizada para a energia de bit E_b/N_0 .

Já os sistemas de múltipla fase tendem a diminuir a ocupação de banda, entretanto exigem maiores valores de relação sinal/ruído normalizada para a energia de bit E_b/N_0 para uma mesma taxa de erro de bits.

Portanto, tanto a sinalização¹ ortogonal quanto a sinalização de múltipla fase nos fornece uma maneira de negociar largura de banda versus relação sinal/ruído, em outras palavras, negociar banda versus desempenho de erro.

No caso da sinalização ortogonal, melhoria no desempenho de erro pode ser atingida às custas da largura de faixa, ou banda. No caso da sinalização de múltipla fase, melhoria na ocupação de banda pode ser conseguida às custas de desempenho de erro. Essa troca entre desempenho de erro e ocupação de banda é uma constante em sistemas de comunicação.

Há uma procura constante por maneiras de se conseguir a menor ocupação de banda possível, por sistema, e o melhor desempenho em relação a taxa de erro.

Daí haverem surgido diversas variações, ou aperfeiçoamentos, das formas básicas de modulação digital. Algumas delas já foram introduzidas no Volume 5, como o

1 O termo sinalização é aqui empregado significando a forma da modulação.

OQPSK e o MSK.

Existem também aplicações de técnicas de modulação com o objetivo de atingir outros recursos, além da transmissão pura e simples da informação, como a multiplexação e o múltiplo acesso.

Na multiplexação, por exemplo, existe uma aplicação interessante no OFDM, que é uma forma de construir sistemas que transmitem a informação de uma forma multiplexada em vários canais ortogonais na frequência. O OFDM é visto, com maiores detalhes, no Volume 7.

VISÃO VETORIAL DA SINALIZAÇÃO MPSK

A Figura 1 apresenta a representação vetorial para um conjunto de sinais MPSK, para $M = 2, 4, 8$ e 16 .

O caso onde $M=2$ corresponde ao BPSK, já estudado no Volume 5. O caso do $M=4$ corresponde ao QPSK, já visto brevemente no mesmo Volume 5.

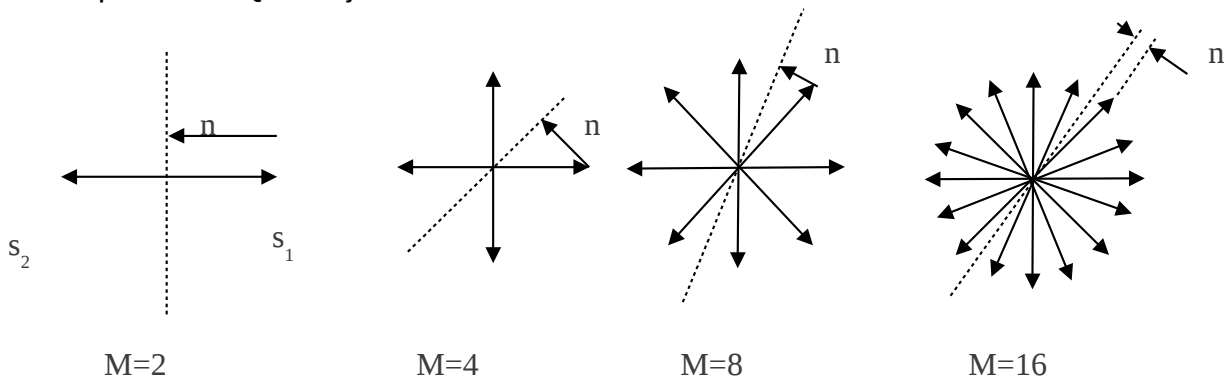


Figura 1
Visão vetorial do MPSK

A Figura 1 mostra a fronteira de decisão em cada caso (linha tracejada) e a amplitude do vetor de ruído n para ilustrar a energia mínima de ruído que levaria o detetor a cometer um erro. Observa-se que essa energia diminui, conforme M aumenta. Isto significa que uma energia menor de ruído é capaz de produzir erros, ou seja, para maiores valores de M é necessário uma relação sinal/ruído mais elevada para manter a mesma probabilidade de erro.

Aumentar M significa aumentar o número de símbolos transmitidos. Supondo que a taxa de transmissão de símbolos seja constante, o aumento de M implica em um aumento da taxa de bits (R), sem que a largura de faixa seja aumentada. Em outras palavras, tem-se maior utilização da banda.

Portanto, em um sistema MPSK, conforme M aumenta, podemos conseguir melhor aproveitamento da banda às custas de uma degradação na taxa de erro, ou então podemos aumentar SNR^2 para que a taxa de erro não se degrade, isto é, conseguir um melhor aproveitamento da banda às custas de um acréscimo de SNR , ou seja, de potência.

² SNR – Relação sinal ruído (Signal to Noise Ratio)

VISÃO VETORIAL DA SINALIZAÇÃO MFSK

O espaço de sinais na sinalização MFSK é caracterizado por M eixos mutuamente ortogonais. Graficamente, podemos representar os casos de $M=2$ e $M=3$. A Figura 2 ilustra essas duas situações. Para $M=2$, temos duas frequências, é o caso do BFSK, já estudado. Nesse caso, temos uma linha de decisão (linha tracejada na figura), definindo duas regiões de decisão. O vetor n representa a energia mínima do ruído para que o detetor cometa um erro.

Para $M=3$, temos 3 regiões de decisão, que são separadas por 3 planos, que são destacados na Figura 2. Novamente, nesse caso, n representa a energia mínima de ruído para que o detetor cometa um erro.

Podemos observar que n tem o mesmo valor, para ambos os casos. Na verdade, demonstra-se que o valor de n não se altera, qualquer que seja o valor de M .

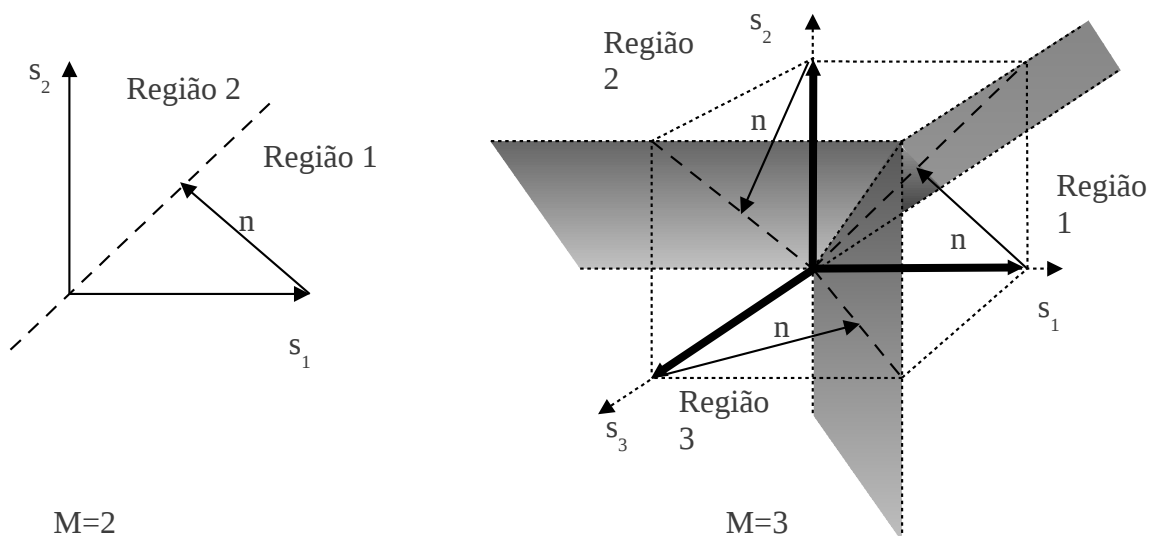


Figura 2
Visão vetorial do MFSK

Seria conveniente mostrar graficamente casos em que $M > 3$, mas isto não é possível. Entretanto, conseguimos perceber, usando um pouco de imaginação, que o acréscimo de eixos ortogonais não torna o espaço de sinais mais “lotado”, como no

MPSK. A adição de novas frequências expande o espaço de sinais, sem que se altere o valor de n .

Este comportamento requer um exame mais acurado sobre o que ocorre efetivamente com o MFSK.

Em primeiro lugar, é fora de dúvida que a ocupação de banda aumenta com o valor de M , ao contrário do que acontece com o MPSK. O que acontece com o desempenho? Para responder com segurança a essa questão, vejamos uma relação básica entre relação sinal/ruído e E_b/N_0 .

A relação sinal/ruído é definida como sendo a razão entre a potência média do sinal, S , e a potência média do ruído, N , ou seja:

$$RSR \text{ (relação sinal/ruído)} = \frac{S}{N}.$$

Olhando para o sinal durante o tempo de duração de um bit, e considerando uma largura de banda de detecção³ W para o sistema, podemos escrever:

$$E_b = S \times T_b \quad \text{e} \quad N = N_0 \times W \quad (\text{Ver nota } ^4)$$

Assim, temos que:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S \times T_b}{\frac{N}{W}} = \frac{S}{N} \times W \times T_b$$

Mas o intervalo T_b é o inverso da taxa de bits, R . Assim,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \times \left(\frac{W}{R} \right)$$

Na expressão acima,

E_b é a energia do sinal modulado durante o tempo de um bit;

N_0 é o valor da densidade espectral do ruído na entrada do detetor;

S é a potência média do sinal modulado;

N é a potência média do ruído na banda do detetor;

W é a largura de faixa de detecção e

R é a taxa de bits do sistema.

3 Não confundir a largura de banda de detecção, W , com a largura de banda total do sistema, W_B . No MFSK, W corresponde à largura de banda para detetar uma frequência, e portanto tem valor nominal típico de $1/T_s$, pois este é o espaçamento mínimo entre portadora para sistemas não-coerentes. A largura de banda total do sistema, W_B , tem valor nominal M/T_s , ou seja, MW .

4 Essa expressão aplica a definição de densidade espectral de potência, uma função que quando integrada ao longo da frequência fornece a potência naquela faixa. Como a densidade espectral do ruído é uma constante de valor N_0 (pois o ruído é considerado branco), a potência total ao longo de uma largura de faixa W é $N = N_0 \times W$.

Para um símbolo com k bits, $R = \frac{k}{T_s} = \frac{\log_2 M}{T_s}$,

onde T_s é a duração de um símbolo. Assim, podemos escrever:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \times \left(\frac{W \times T_s}{\log_2 M} \right) = \frac{S}{N} \times \left(\frac{W \times T}{k} \right).$$

Para a sinalização FSK, a banda de detecção W , em Hz, é tipicamente igual em valor

à taxa de símbolos $\frac{1}{T_s}$, em outras palavras, $W \times T_s \approx 1$. Portanto, concluímos que:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx \frac{S}{N} \left(\frac{1}{k} \right).$$

Esta última expressão nos mostra que para valores de k crescentes, e mantendo-se constante a potência do sinal, o valor da potência de ruído deve diminuir, se

queremos uma relação $\frac{E_b}{N_0}$ constante. Isto significa que, se aumentamos M ,

mantendo constante o valor de $\frac{E_b}{N_0}$, a probabilidade de erro deve diminuir. Este é um

comportamento bem diferente do MPSK, onde ocorre exatamente o contrário. Em outras palavras, para o MFSK, temos uma troca entre banda e desempenho em relação ao erro.

DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA SISTEMAS M-ÁRIOS (M>2)

DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MPSK

A probabilidade de erro de símbolos para sinais MPSK detetados coerentemente é dada aproximadamente por (este é um limite superior, mais próximo do valor real quanto maior o valor de M) :

$$P_E(M) \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right), \text{ onde}$$

$P_E(M)$ representa a probabilidade de erro de símbolo, $M=2,4,8, \dots$

$$E_s = E_b (\log_2 M)$$

Observe que para $M=2$,

$$P_E(2) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2 \times \log_2 2 \times E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Para $M=4$,

$$P_E(4) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2 \times \log_2 4 \times E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2 \times 2 \times E_b}{N_0}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = P_E(2)$$

Isto significa que as duas curvas para $M=2$ e $M=4$ serão iguais, quando traçadas P_E versus E_b/N_0 .

Isto mostra que este resultado está superestimado para o caso do BPSK, pois para o BPSK temos⁵

$$P_b = P_E = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

A Figura 3 apresenta, graficamente, os resultado do cálculo da probabilidade de erro de símbolo P_E para valores de $M = 4, 8, 16, 32$ e 64 .

⁵ Note que para o BPSK $P_E = P_b$, uma vez que símbolo e bit se confundem.

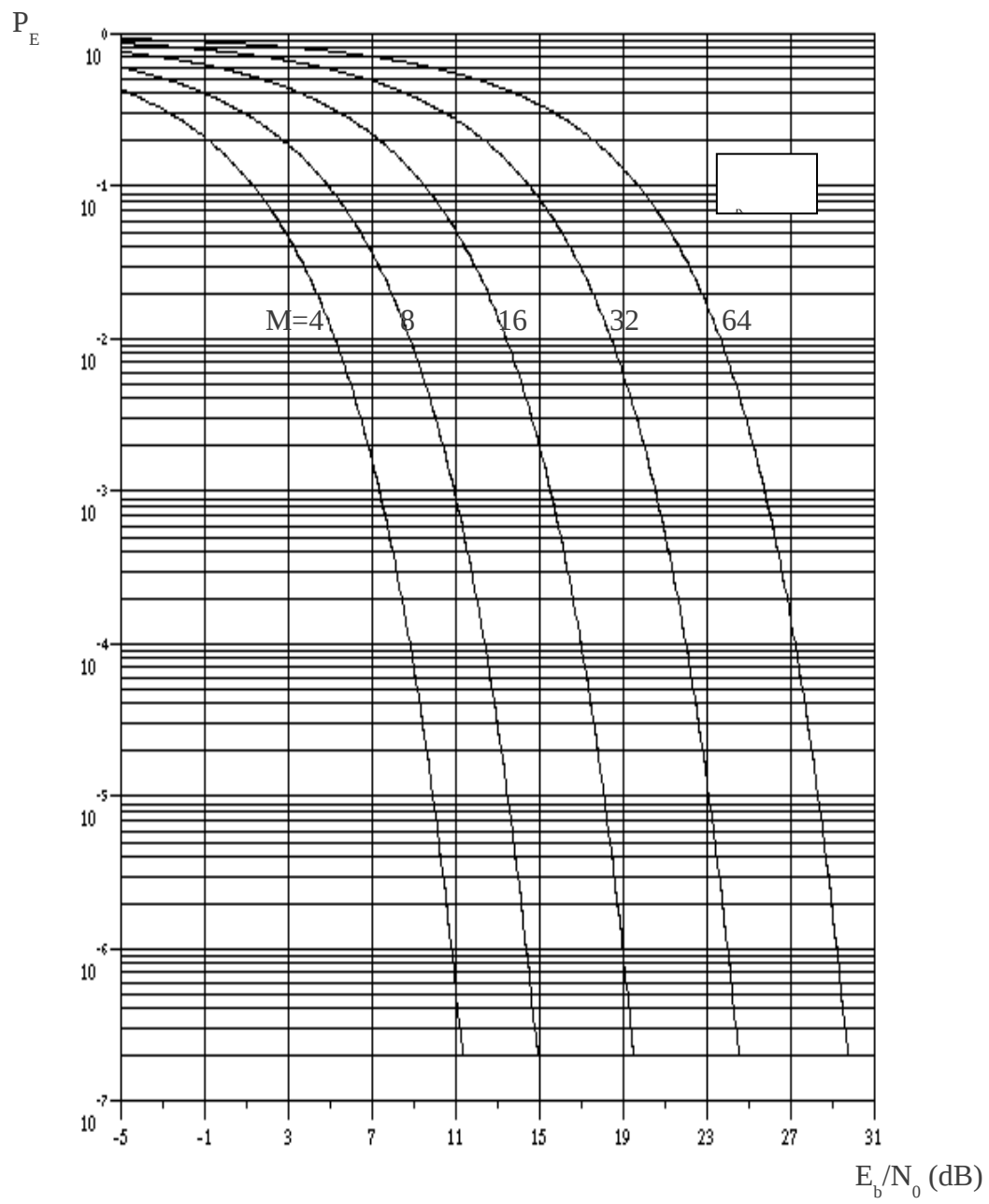


Figura 3
 Probabilidade de erro de símbolo P_E versus E_b/N_0
 para MPSK

DESEMPENHO DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MFSK

O desempenho de erro de símbolo $P_E(M)$, para sinais MFSK igualmente prováveis e detetados de modo coerente, pode ser superiormente limitado por:

$$P_E(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ onde}$$

$E_s = E_b(\log_2 M)$ é a energia por símbolo, $M=2^k$, k é o tamanho da palavra em bits.

A Figura 4 apresenta o traçado da expressão acima para vários valores de k .

Observa-se desta figura que o comportamento do MFSK é o contrário de MPSK, isto é, o aumento de k , conseqüentemente de M , diminui o valor de E_b/N_0 necessário à obtenção de uma determinada taxa de erro de símbolos.

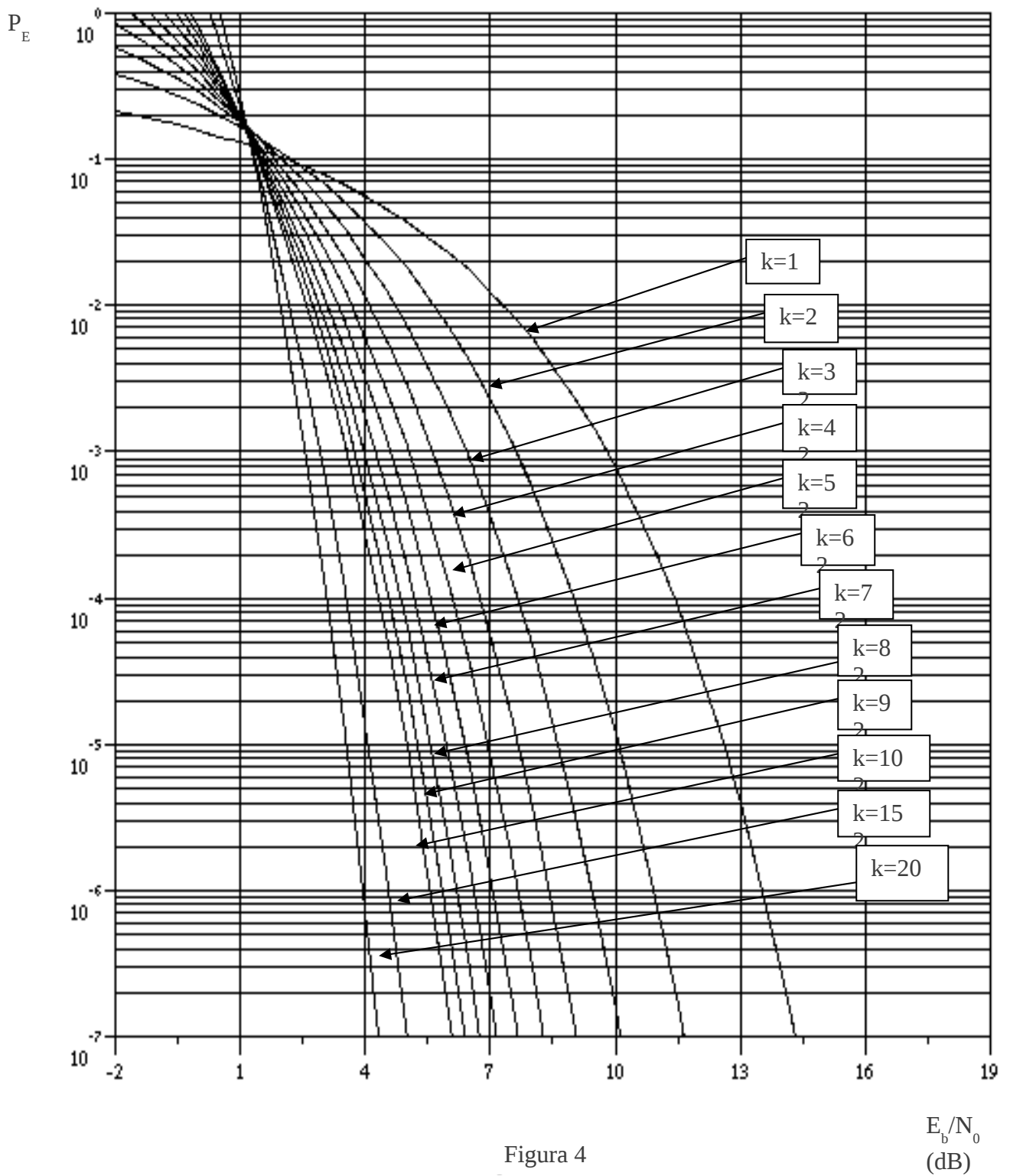


Figura 4
Desempenho de erro de símbolo P_E
versus E_b/N_0 para sinais MFSK detetados
coerentemente.

PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT VERSUS PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MPSK

A equivalência exata entre probabilidade de erro de bit e probabilidade de erro de símbolo é bastante trabalhosa de ser feita no MPSK, devido a sua dependência do mapeamento dos símbolos de k-bits nas fases correspondentes do sinal.

De forma aproximada, supondo o uso de um código de Gray⁶ para o mapeamento, dois símbolos de k-bits correspondentes a fases adjacentes diferem apenas por um (1) bit. Uma vez que a maioria dos erros devido ao ruído resulta em seleção errônea da fase adjacente à fase verdadeira, a maioria dos símbolos de k-bits errados contém apenas um único bit com erro. Portanto, podemos escrever que, para o MPSK,

$$P_B \approx \frac{1}{k} P_E .$$

⁶ O código de Gray é um código onde duas palavras adjacentes diferem apenas por 1 bit. Como a maioria dos erros ocorrem em apenas 1 bit de cada palavra, a ocorrência de um erro provocará a troca de um símbolo por um adjacente, levando à distância mínima para a maioria dos erros.

PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT VERSUS PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MFSK

No caso do MFSK ortogonal, um erro de decisão poderá transformar o sinal correto em qualquer um dos $(M-1)$ sinais restantes com igual probabilidade. Isto não quer dizer que, ao ser cometido um erro de símbolo, todos os bits da palavra errada serão diferentes dos corretos. É aparente que $P_B < P_E$.

Considerando um conjunto de palavras de mensagens de tamanho $M=2^k$, em cada posição de bit a porcentagem de bits 1 é 50% dos bits 0 ao longo de todas as palavras do conjunto. Por exemplo, no contexto da primeira posição de bit (bit mais à direita), de quantas formas um erro pode ocorrer, considerando o conjunto das M palavras? Sendo 2^k o número total de bits nessa posição (pois são 2^k palavras), 50% corresponde a 2^{k-1} . Portanto, existem 2^{k-1} formas de ocorrer um erro de bit. Este valor é o mesmo para as demais posições de bit.

A relação final entre P_B e P_E para o MFSK é estimada formando-se a seguinte relação: o número de maneiras em que um erro de bit pode ocorrer (2^{k-1}) dividida pelo número de maneiras em que um erro de símbolo pode ocorrer (2^k-1).

Assim, para sistemas MFSK:

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M-1} . \text{ No limite, quando } k \text{ é muito grande, } \frac{P_B}{P_E} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

MODULAÇÃO QPSK

QPSK, modulação em quadratura PSK, constitui na realidade o 4PSK (MPSK, $M=4$), pode ser definido pela seguinte equação:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$d_I(t)$ e $d_Q(t)$ são os fluxos digitais resultantes da separação dos bits de entrada pares e ímpares.

$d_I(t)$ e $d_Q(t)$ têm a interpretação de componentes em fase e em quadratura, porque modulam em amplitude respectivamente o $\cos$ e o $\sin$, que são ortogonais.

O sinal resultante tem a forma geral $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, onde θ pode assumir o valor de $\pm 45^\circ$ ou $\pm 135^\circ$, conforme a combinação de valores de amplitude de $d_I(t)$ e $d_Q(t)$.

O resultado pode ser ilustrado pelo diagrama de constelação do QPSK, reproduzido na Figura 5.

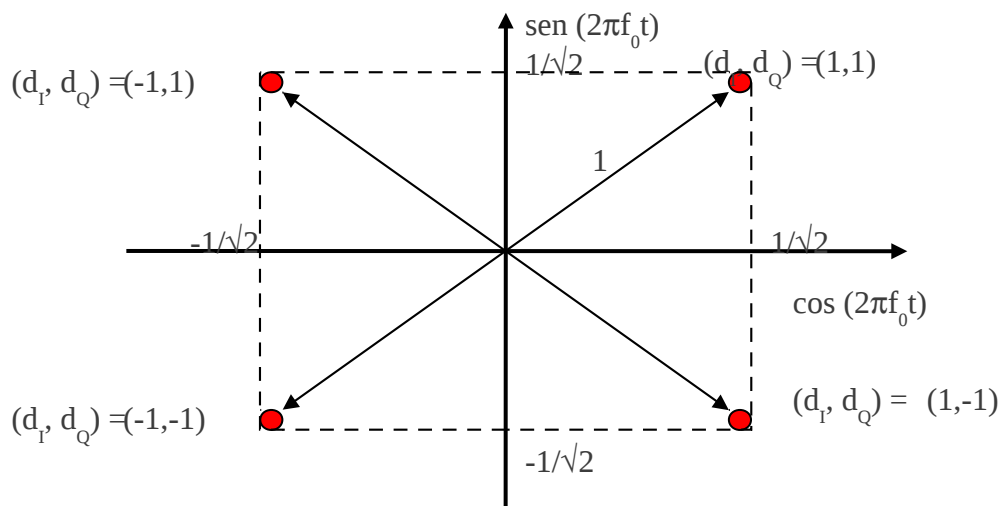


Figura 5
Diagrama de constelação para QPSK

Desta forma, cada fase do sinal QPSK corresponde a uma mensagem de comprimento $k=2$ [(00), (01), (10), (11)]. Assim, cada ponto no diagrama de constelação corresponde a uma destas quatro mensagens.

Evidentemente, a taxa de transmissão de símbolos do QPSK é $R/2$ baud.

Da teoria de sinais, o sinal resultante pode ser encarado como uma onda DSB-SC (banda lateral dupla com portadora suprimida), uma vez que a banda é o dobro da largura de faixa do sinal de banda básica ($d_I(t)$ e $d_Q(t)$) e não existe termo isolado de portadora.

$d_I(t)$ e $d_Q(t)$, no caso do QPSK, são sinais retangulares bipolares, que podem assumir o valor $+1$ ou -1 , conforme o símbolo (1 ou 0) sendo transmitido. No caso, conforme ilustra a Figura 6, o fluxo dos sinais $d_I(t)$ e $d_Q(t)$ têm o dobro do tempo de símbolo do fluxo de entrada, logo, se a taxa de transmissão de dados de entrada for de R bits/s, cada fluxo $d_I(t)$ e $d_Q(t)$ tem uma taxa de transmissão de $R/2$ bits por segundo.

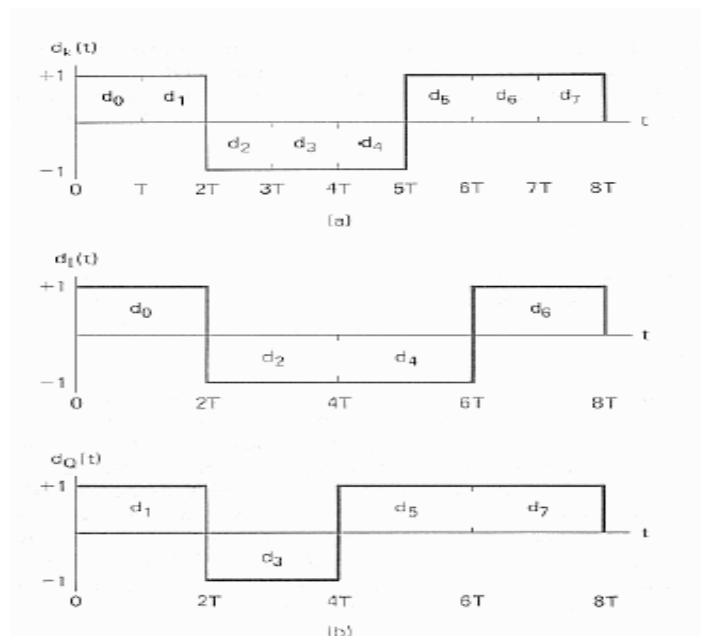


Figura 6

Fluxo de dados de entrada e fluxo em fase ($d_I(t)$) e em quadratura ($d_Q(t)$) para o QPSK

MODULAÇÃO MQAM

A modulação QAM pode ser considerada uma extensão natural da modulação QPSK.

Essa mesma estrutura serve de base para o MQAM ($M=4,8,16,32 \dots$)

Inicialmente, o fluxo de dados de entrada é dividido em duas componentes, $d_I(t)$ e $d_Q(t)$, como no QPSK.

Entretanto, ao invés de modular diretamente as portadoras $\sin$ e $\cos$, o fluxo de bits $d_I(t)$ (e também $d_Q(t)$), é paralelizado (ou seja, transformado de um fluxo serial em um fluxo paralelo), fluxo este que alimenta um conversor digital/analógico (D/A).

Cada bloco de k bits do fluxo de entrada (k sendo suposto um número par) pode ser dividido em dois blocos de $k/2$ bits, que utilizam um conversor D/A para gerar as formas de onda banda básica que irão modular as portadoras em quadratura.

No receptor, cada um dos dois sinais pode ser independentemente detectado usando correladores ou filtros casados.

QAM pode ser visto como uma combinação de modulação por chaveamento em amplitude (ASK) com modulação por chaveamento na fase (PSK), sendo assim alternativamente chamada de APK – chaveamento na amplitude e fase.

A Figura .7 apresenta um exemplo de um possível modulador 16QAM.

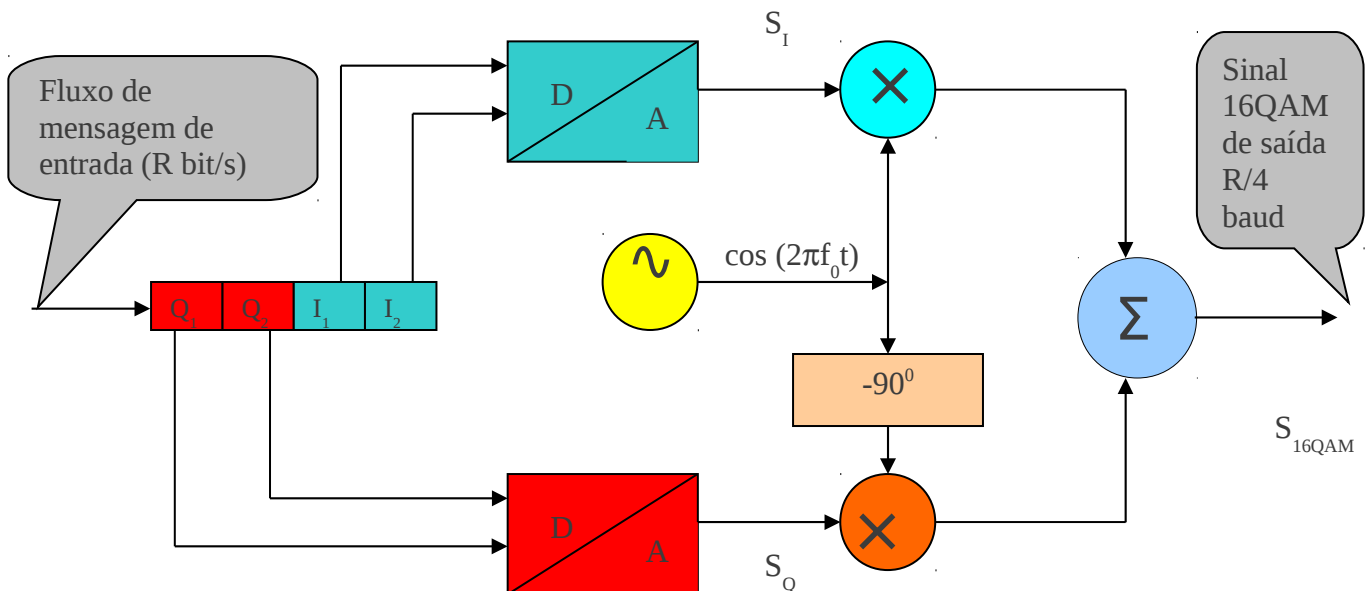


Figura IV.5.7
Exemplo de um modulador 16 QAM
Figura 7

A Figura 8 apresenta o diagrama de constelação para a modulação 16QAM resultante do diagrama em blocos da Figura 7.

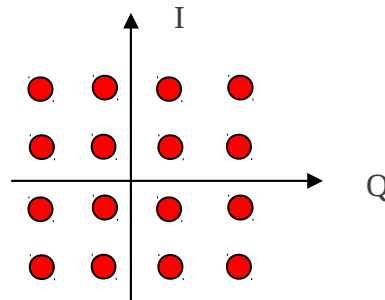


Figura 8
Diagrama de constelação para o modulador 16QAM

A Tabela 1 abaixo apresenta possíveis valores numéricos, daí decorrendo uma possível alocação de palavras para cada ponto do diagrama de constelação da Figura 8.

Tabela 1

I_1	I_2	$S_I (V)$	Q_1	Q_2	$S_Q(V)$
0	0	-0,22	0	0	-0,22
0	1	-0,821	0	1	-0,821
1	0	+0,22	1	0	+0,22
1	1	+0,821	1	1	+0,821

Quando M é um número ímpar, por exemplo $M=3$, o diagrama em bloco da Figura 7 é levemente modificado, pois o registrador de deslocamento usado na entrada, para paralelizar os bits da mensagem terá um número ímpar de registros, e assim o mesmo registro terá que ser enviado simultaneamente a ambos os conversores D/A. Para $M=3$, por exemplo, temos o diagrama da Figura 9

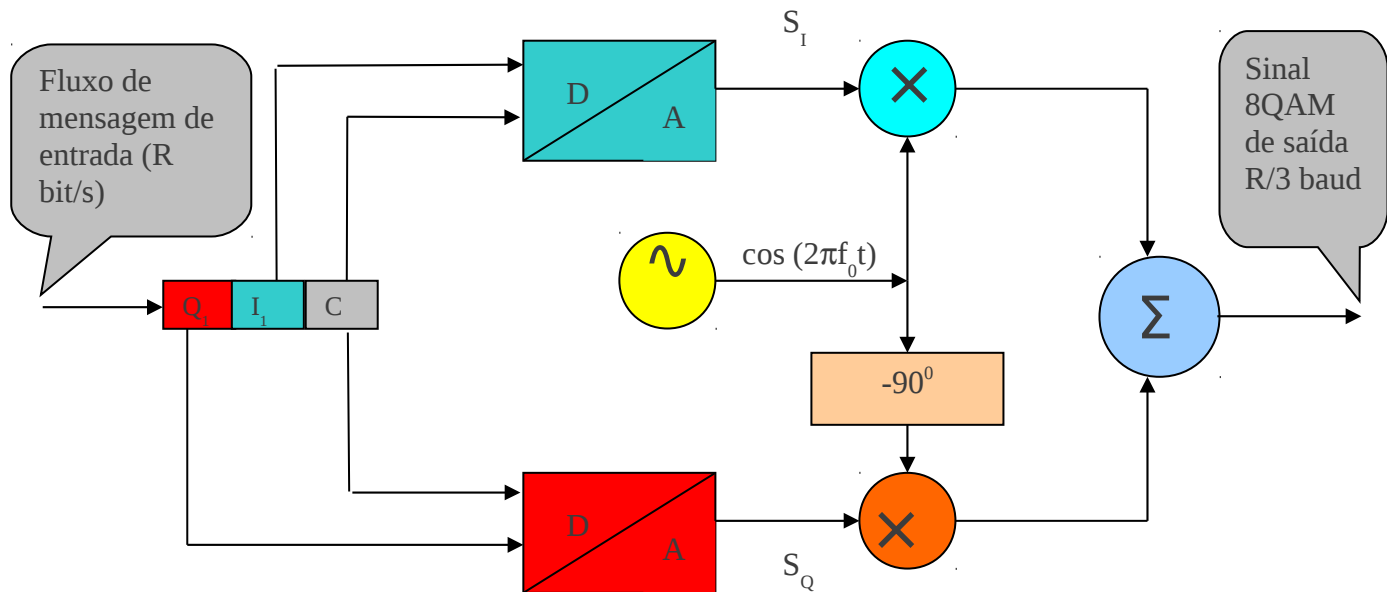


Figura 9

Exemplo de um modulador 8 QAM

Um possível diagrama de constelação para o modulador 8QAM da Figura 9 está apresentado na Figura 10.

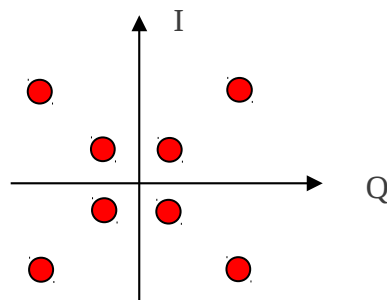


Figura 10

Diagrama de constelação para o modulador 8QAM

A Tabela 2 a seguir apresenta valores que podem ser usado para gerar a alocação de códigos nos pontos adequados da Figura 10:

Tabela 2

I/Q	C	SAIDA DO CONVERSOR (V)
0	0	-0,541
0	1	-1,307
1	0	+0,541
1	1	+1,307

Diversas outras figuras são possíveis ao diagrama de constelação. Ver, por exemplo, o diagrama recomendado para o 128QAM na Recomendação V.32 bis, a ser usada em modems até 14,4 kbits/s.

Um outro exemplo está apresentado na Figura 11, onde são apresentadas constelações retangulares para 16QAM e 64QAM e em cruz, para, 32 QAM. e 128QAM.

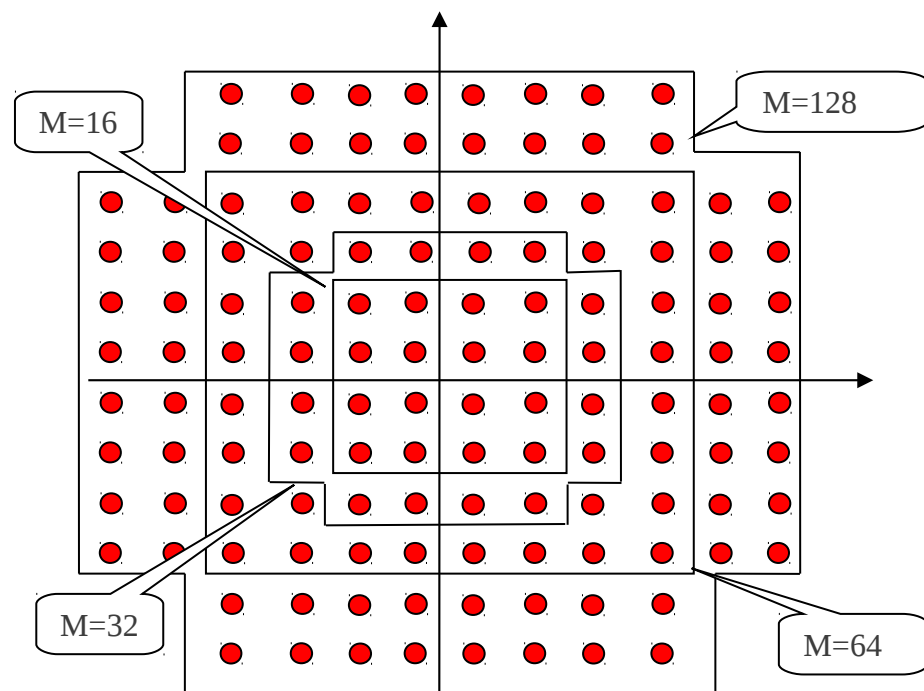


Figura 11

Exemplo de constelações para 16, 32, 64 e 128QAM

PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO PARA MQAM

Considerando constelações retangulares a probabilidade de erro de símbolos para MQAM pode ser aproximada por:

$$P_E \leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3kE_b}{(M-1)N_0}}\right), \text{ para qualquer } k \geq 1.$$

Note que para o MPSK temos

$$P_E(M) \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

A Figura 12 apresenta uma comparação entre a probabilidade de erro de símbolo para o MQAM e o MPSK, baseada nas equações acima. Note que para $M=4$, as duas modulações seriam equivalentes. A diferença observada na Figura 12 deve-se a aproximações usadas nas fórmulas. Das curvas da Figura 12 observa-se a superioridade do MQAM sobre o MPSK, principalmente para valores elevados de M .

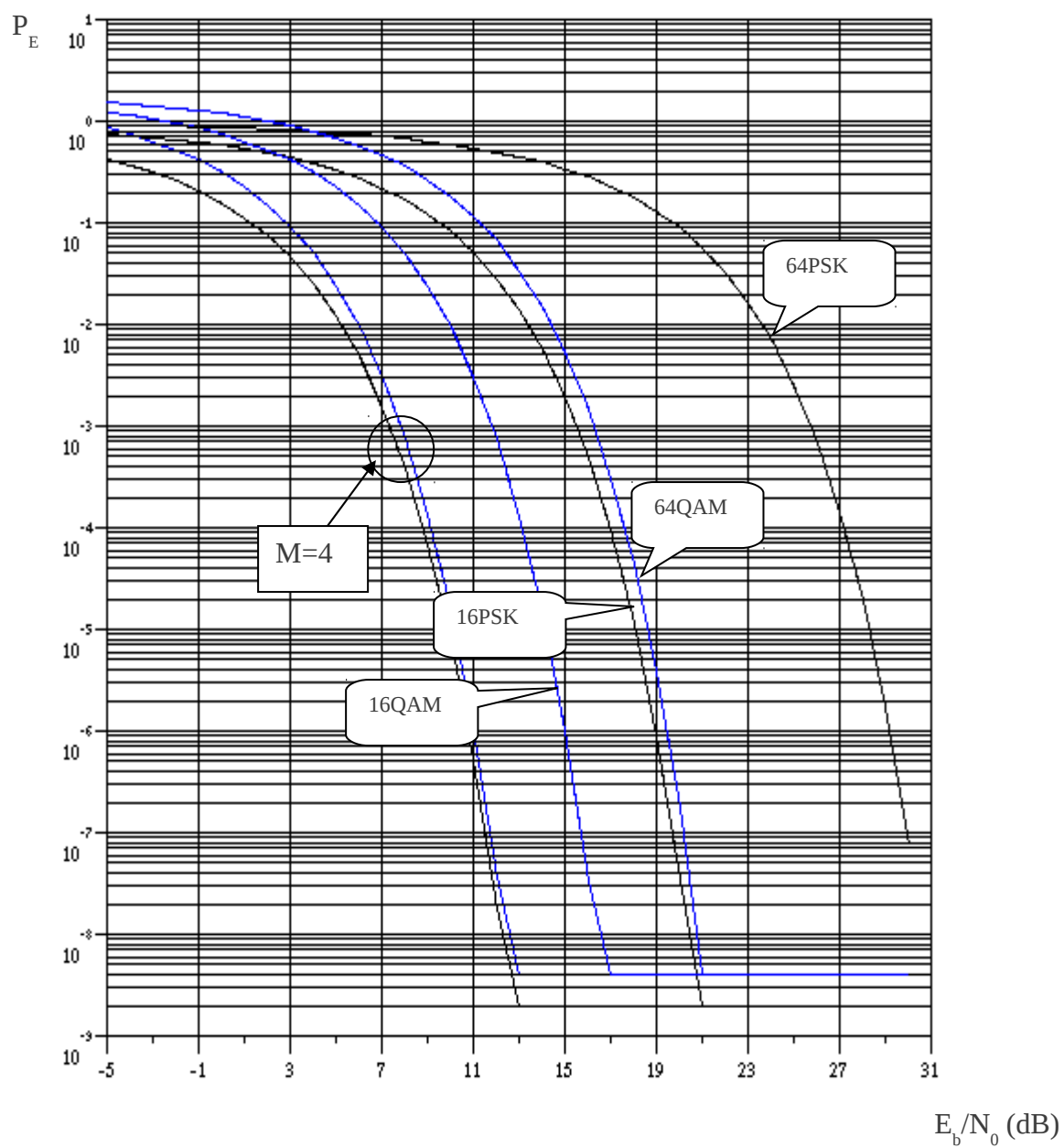


Figura 12

Comparação MQAM e MPSK

EFICIÊNCIA ESPECTRAL DE MODULAÇÕES M-ÁRIAS

LARGURA DE BANDA DE NYQUIST

Todo sistema fisicamente realizável que utilize algum tipo de filtragem sofre de interferência intersimbólica (ISI) – o final de um pulso se estendendo até o intervalo de símbolo adjacente, de modo a interferir com a decisão correta. Nyquist mostrou que, em teoria, R_s símbolos por segundo poderiam ser detetados sem ISI em uma largura de banda mínima de $R_s/2$ Hertz (largura de banda de Nyquist).

Na prática, R_s Hertz é tipicamente requerido para a transmissão de R_s símbolos por segundo.

Em outras palavras, o fluxo de entrada de sistemas típicos de transmissão digital é limitado a 1 símbolo/s por Hertz.

EFICIÊNCIA ESPECTRAL

A eficiência espectral é definida pela relação R/W , e é uma medida de quanto de informação pode ser comunicado com uma largura de banda especificada durante um certo tempo; portanto reflete a eficiência com que o recurso de largura de banda é utilizado.

EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MPSK

Supondo filtragem ideal de Nyquist na banda básica⁷ (retangular ideal), este sinal possui uma largura de banda de $1/2T$, e portanto a largura de banda mínima do sinal modulado é $1/T$, onde T é a duração de um símbolo (modulação com banda lateral dupla – DSB).

Uma vez que cada símbolo é composto de k bits, a taxa de fluxo de dados de entrada é k/T bits/s, logo a eficiência espectral será de $R/W = \log_2 M$, onde M é o tamanho do conjunto de símbolos.

Por exemplo, a modulação QPSK tem uma eficiência espectral de $\log_2 4$ bit/s/Hz = 2 bits/s/Hz. Já o BPSK possui apenas 1 bit/s/Hz.

Para canais e formas de onda mais realísticas, o desempenho deve ser reduzido para levar em conta o aumento na largura de banda necessário para implementar filtros realizáveis.

⁷ banda básica significa o sinal imediatamente anterior à modulação, ou seja, o sinal modulante.

EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MFSK

Supondo MFSK não coerente ortogonal, um valor nominal para a largura de banda do sinal modulado será M/T (M vezes o espaçamento mínimo), e desta forma a eficiência nominal é de $R/W=k/M$.

Note que para MFSK, a eficiência decresce com o aumento de M .

Note também que a eficiência varia com o espaçamento em Hertz entre as frequências.

Por exemplo, para BFSK, $k=1$, e $M=2$. Logo, a eficiência espectral é $1\text{bit/s}/2\text{ Hz}=1/2$. Para para 4FSK, $k=2$, e $M=4$. Logo, a eficiência espectral é também $2\text{bit/s}/4\text{ Hz}=1/2$.

Para 8FSK, $k=3$ e $M=8$, e a eficiência espectral é $3\text{ bit/s}/8\text{ HZ}=3/8$.

EFICIÊNCIA ESPECTRAL PARA MQAM

Sendo derivado do QPSK, a eficiência espectral do MQAM é a mesma do MPSK⁸, isto é, $R/W = \log_2 M$. Assim como no MPSK, a largura de banda pode ser negociada com a potência de transmissão ou E_b/N_0 . Entretanto, essa troca é muito mais eficiente no caso do MQAM, como pode ser visto da Figura 12.

8 O MQAM, assim como o MPSK, é um esquema de modulação DSB (Banda Lateral Dupla).

RESUMO

Foram apresentados os conceitos básicos relativos a modulações M-árias, destacando-se uma comparação do comportamento do MPSK e do MFSK. O primeiro procura economizar largura de banda do sistema, entretanto necessita de maiores valores de relação sinal ruído com o aumento do número de níveis de modulação. Já o segundo preocupa-se em economizar potência de sinal, obtendo maiores valores de largura de banda para o aumento no número de níveis. Portanto, de um modo geral, a eficiência espectral de sistemas MPSK é maior que para sistemas MFSK.

Foi mostrado também a noção de modulação MQAM, que é uma combinação de modulação em amplitude com modulação em fase. A eficiência espectral de sistemas MQAM é igual à de sistema MPSK.

Foram apresentados também alguns diagramas de constelação, para sistemas MPSK e MQAM. É importante observar que a forma dos diagramas de constelação para sistemas MQAM não se resume ao apresentado, podendo apresentar vários formatos, em função da distribuição dos valores de amplitude e fase. Além da forma retangular, podemos ter formatos circulares, triangulares, ou mesmo hexagonais.

Foram apresentados também gráfico de probabilidade de erro em função da relação energia de bit para densidade espectral do ruído, comparando-se MQAM com MPSK e destacando-se o comportamento dos sistemas MFSK.

Finalmente, foram apresentados também diagramas em blocos para sistemas de geração dos sinais MPSK, MFSK e MQAM.

EXERCÍCIOS

1) Preencha as lacunas

a) Na sinalização_____, a mensagem é constituída por palavras de comprimento_____. O modulador produz _____formas de onda. O caso binário é um caso particular onde_____.

b) De um modo geral, os sistemas M-ários dividem-se entre aqueles onde a dimensão é_____, como o MFSK, e aqueles onde a _____é realizada na fase, como os_____.

c) No caso do MFSK, é comum utilizar-se o espaçamento mínimo entre frequências para que _____entre as formas de onda do sinal modulado, durante o_____. Este espaçamento na frequência corresponde a _____e nesse caso os sistemas são chamados_____.

d) Os sistemas _____tendem a aumentar a largura de banda de transmissão com o aumento de k , e _____o desempenho em relação à_____, para uma dada relação sinal/ruído normalizada para a energia de bit E_b/N_0 .

e) Já os sistemas de _____tendem a diminuir a ocupação de banda com o aumento de k , entretanto exigem _____pa
ra uma mesma taxa de erro de bits.

f) No caso da sinalização ortogonal, melhoria no _____pode ser atingida às custas_____. No caso da sinalização de múltipla fase, melhoria _____pode ser conseguida às custas de_____.

2) Supondo que o critério de comparação entre dois sistemas seja o desempenho em relação à taxa de erro de bit, qual dos dois sistemas abaixo você escolheria?

16PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB

8PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB

3) Um sistema 16PSK coerente trabalha com uma taxa de bits de 100 kbit/s, com uma potência média de entrada no receptor de $2 \mu\text{W}$. Um outro sistema 8 PSK coerente trabalha com uma taxa de bits de 75 kbit/s, e uma potência média de entrada no receptor de $1,5 \mu\text{W}$. Supondo que o critério de comparação entre dois sistemas seja o desempenho em relação à taxa de erro de bit, qual dos dois sistemas você escolheria? Suponha o ruído no canal do tipo AWGN, cuja densidade de potência tem o valor $N_0 = 10^{-11} \text{ W/Hz}$.

4) Se o critério de escolha dos sistemas do exercício (3) fosse baseado na eficiência espectral, qual seria o sistema escolhido?

Solução:

5) Se o critério de escolha dos sistemas do exercício (3) fosse baseado na ocupação de banda, qual seria o sistema escolhido?

6) Um sistema 16FSK coerente opera, na entrada do receptor, com um relação sinal/ruído S/N de 10 dB. Qual a relação E_b/N_0 (em dB)?

7) Pelo gráfico da Figura 4, qual é aproximadamente a taxa de erros de símbolo do sistema 16FSK do exercício (6)? E a taxa de erro de bits?

8) Ainda para o sistema 16FSK do exercício (6), qual a largura de banda esperada para uma operação em 100 kbit/s?

9) Deseja-se aumentar o desempenho do sistema do exercício (6) diminuindo P_B . No entanto, não é possível aumentar a potência média de transmissão. Sem mudar o tipo da modulação (isto é, continuando-se a utilizar MFSK), qual seria o procedimento mais direto?

10) Suponha que um fluxo de dados com $R=144$ Mbit/s deva ser transmitido em um canal RF usando um esquema de modulação DSB⁹. Suponha ainda filtragem de Nyquist e uma largura de banda DSB permissível de 36 MHz. Qual esquema de modulação seria escolhido? Se a relação E_b/N_0 disponível for igual a 20, Qual seria a probabilidade de erro de símbolo resultante?

9 DSB – Banda Lateral Dupla

EXERCÍCIOS - SOLUÇÃO

1) Preencha as lacunas

a) Na sinalização M-ária, a mensagem é constituída por palavras de comprimento k bits. O modulador produz $M=2^k$ formas de onda. O caso binário é um caso particular onde $k=1$.

b) De um modo geral, os sistemas M-ários dividem-se entre aqueles onde a dimensão é expandida na frequência, como o MFSK, e aqueles onde a expansão é realizada na fase, como os sistemas MPSK.

c) No caso do MFSK, é comum utilizar-se o espaçamento mínimo entre frequências para que haja ortogonalidade entre as formas de onda do sinal modulado, durante o tempo de um símbolo, T. Este espaçamento na frequência corresponde a $1/T$, e nesse caso os sistemas são chamados ortogonais.

d) Os sistemas ortogonais tendem a aumentar a largura de banda de transmissão com o aumento de k, e melhorar o desempenho em relação à taxa de erro de bits, para uma dada relação sinal/ruído normalizada para a energia de bit E_b/N_0 .

e) Já os sistemas de múltipla fase tendem a diminuir a ocupação de banda com o aumento de k, entretanto exigem maiores valores de relação sinal/ruído normalizada para a energia de bit E_b/N_0 para uma mesma taxa de erro de bits.

f) No caso da sinalização ortogonal, melhoria no desempenho de erro pode ser atingida às custas da largura de faixa, ou banda. No caso da sinalização de múltipla fase, melhoria na ocupação de banda pode ser conseguida às custas de desempenho de erro.

2) Supondo que o critério de comparação entre dois sistemas seja o desempenho em relação à taxa de erro de bit, qual dos dois sistemas abaixo você escolheria?

16PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB

8PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB

Solução:

8PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB, que sem dúvida trabalharia com uma taxa de erro menor que 16PSK coerente com $E_b/N_0 = 10$ dB.

3) Um sistema 16PSK coerente trabalha com uma taxa de bits de 100 kbit/s, com uma potência média de entrada no receptor de $2 \mu\text{W}$. Um outro sistema 8 PSK coerente trabalha com uma taxa de bits de 75 kbit/s, e uma potência média de entrada no receptor de $1,5 \mu\text{W}$. Supondo que o critério de comparação entre dois sistemas seja o desempenho em relação à taxa de erro de bit, qual dos dois sistemas você escolheria? Suponha o ruído no canal do tipo AWGN, cuja densidade de potência tem o valor $N_0 = 10^{-11}$ W/Hz.

Solução:

O primeiro sistema, sendo 16PSK, trabalha com $k=4$. Logo, a taxa de símbolos é de 25 kbaud. Desta forma, o tempo de símbolo é $40 \mu\text{s}$. Desta forma, $E_s = 40 \times 2 \times 10^{-12}$ J. A probabilidade de erro de símbolo é limitada a

$P_E(M) \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$, que para os valores dados vale 0,4354. A probabilidade de

erro de bit vale $\frac{E_s}{k} = 0,0272$

O segundo sistema, sendo 8 PSK, trabalha com $k=3$. Logo, a taxa de símbolos é também 25 kbaud, e portanto o tempo de símbolo é também $40 \mu\text{s}$. Desta forma $E_s = 60 \times 10^{-12}$ J. Portanto, a probabilidade de erro de bit é limitada a 0,0233.

Assim, seria escolhido o sistema 8PSK.

4) Se o critério de escolha dos sistemas do exercício (3) fosse baseado na eficiência espectral, qual seria o sistema escolhido?

Solução:

A eficiência espectral de sistemas MPSK é dada por $R/W = \log_2 M$. Logo, o sistema 16PSK seria escolhido.

5) Se o critério de escolha dos sistemas do exercício (3) fosse baseado na ocupação de banda, qual seria o sistema escolhido?

Solução:

A eficiência espectral do 16PSK vale 4 bit/s/Hz. Como a taxa de bits $R=100$ kbit/s, $W=25$ KHz. No 8PSK, a eficiência espectral é de 3 bit/s/Hz. Portanto, $W=25$ KHz. Desta forma, ambos os sistemas ocupam a mesma banda, e baseados neste critério não seria possível escolher o sistema.

6) Um sistema 16FSK coerente opera, na entrada do receptor, com um relação sinal/ruído S/N de 10 dB. Qual a relação E_b/N_0 (em dB)?

Solução:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx \frac{S}{N} \left(\frac{1}{k} \right), \text{ logo } \frac{E_b}{N_0} = \frac{10}{4} = 2,5. \text{ Então } \frac{E_b}{N_0} (dB) = 10 \log_{10}(2,5) = 3,98 \text{ dB}$$

7) Pelo gráfico da Figura 4, qual é aproximadamente a taxa de erros de símbolo do sistema 16FSK do exercício (6)? E a taxa de erro de bits?

Solução: Considerando a precisão do gráfico, podemos ver que $P_E \cong 10^{-2}$. Para

sistemas MFSK, temos que $\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M-1}$. Assim, $P_B \cong 0,53 \times 10^{-2}$.

8) Ainda para o sistema 16FSK do exercício (6), qual a largura de banda esperada para uma operação em 100 kbit/s?

Solução: A taxa de símbolos será de $100/4 = 25$ Kbaud. Portanto, a largura de banda esperada para o sistema é de $16 \times 25 = 400$ KHz.

9) Deseja-se aumentar o desempenho do sistema do exercício (6) diminuindo P_B . No entanto, não é possível aumentar a potência média de transmissão. Sem mudar o tipo da modulação (isto é, continuando-se a utilizar MFSK), qual seria o procedimento mais direto?

Solução:

Se não é possível aumentarmos a potência da transmissão, significa que o valor de S

permanece constante. Sabemos que $\frac{E_b}{N_0} \approx \frac{S}{N} \left(\frac{1}{k} \right)$. Portanto, se S permanece

constante, podemos tentar variar o de k , e assim tentarmos obter um ponto de operação mais favorável para o sistema.

O valor atual de $k=4$. Tentando-se usar $k=3$, a taxa de símbolos aumenta para 100/3 kbaud. Espera-se, portanto, um aumento na banda de detecção proporcional a $4/3$, e conseqüentemente uma diminuição na relação S/N . Pelo enunciado do exercício (6), $E/S = 10$ dB para $k=4$, daí para $k=3$ temos $S/N = 10 \times 3/4 = 7,5$, ou 8,7 dB. Portanto

para $k=3$ $\frac{E_b}{N_0}(dB) = 10 \log_{10}(7,5/3) = 3,98$ dB . Pelo gráfico da Figura 4, verificamos

que mantendo-se E_b/N_0 invariável, a taxa de erro piora com a diminuição de k . Portanto, isto não resolve.

Tentando-se usar $k=5$, a taxa de símbolos diminui para 20 kbaud, o que provocará uma diminuição proporcional na potência do ruído e conseqüentemente um aumento na relação S/N , que passa a valer $10 \times 5/4 = 12,5$ = 10,1 dB. Daí,

$\frac{E_b}{N_0}(dB) = 10 \log_{10}(12,5/5) = 3,98$ dB . Novamente, percebemos que a relação E_b/N_0

permanece com o mesmo valor, mas agora $k=5$.

Pelo gráfico da Figura 4, verificamos que a taxa de erro de símbolos diminui, e conseqüentemente também a taxa de erro de bit, em relação ao valor inicial para $k=4$.

Portanto, concluímos que o procedimento mais direto seria aumentar o valor de k , ou, em outras palavras, usar $M > 16$.

10) Suponha que um fluxo de dados com $R=144$ Mbit/s deva ser transmitido em um canal RF usando um esquema de modulação DSB¹⁰. Suponha ainda filtragem de Nyquist e uma largura de banda DSB permissível de 36 MHz. Qual esquema de modulação seria escolhido? Se a relação E_b/N_0 disponível for igual a 20, Qual seria a probabilidade de erro de símbolo resultante?

Solução:

A eficiência espectral requerida é $\frac{R}{W_b} = \frac{144}{36} = 4 \text{ bit/s/Hz}$. Como para MPSK ou MQAM (que são esquemas de modulação DSB) a eficiência espectral é a mesma, e

¹⁰ DSB – Banda Lateral Dupla

igual a $R/W = \log_2 M$, $M=16$. Da Figura 12 notamos que 16QAM, com uma eficiência espectral teórica de 4 bit/s/Hz, requer uma relação E_b/N_0 menor que um 16PSK, para a mesma P_E . Portanto, o esquema escolhido seria o 16QAM.

A relação $E_b/N_0=20$ corresponde a 13 dB, e a Figura 12 nos mostra que $P_E \approx 10^{-4}$ para 16QAM.