

João Baptista Bayão Ribeiro

TELECOMUNICAÇÕES

4º Volume

1ª Edição

Rio de Janeiro

J. B. Bayão

2012

Curriculum do Autor

João Baptista Bayão Ribeiro é formado em Engenharia de Telecomunicações pela UFF (Universidade Federal Fluminense) em 1971. Trabalhou na Philips do Brasil como Engenheiro Instalador, na Divisão de Equipamentos Científicos e Industriais e simultaneamente como professor da UFF em tempo parcial. Depois ingressou no Laboratório de Desenvolvimento da antiga Telerj, onde trabalhou em Normas Técnica de Operação e de Sistemas. É pós-graduado em Engenharia Elétrica pelo COPPE-UFRJ, onde obteve o título de MsC em 1979. Na década de 80 trabalhou no CpqD em Campinas, na especificação do projeto Trópico, como Engenheiro da Telecom, de S. Paulo. De volta à Telerj, trabalhou no Planejamento de Redes Telefônicas e de Dados. Fez inúmeros trabalhos para a antiga Telebrás, tendo participado ativamente do processo de digitalização do Sistema Telefônico no Brasil. Participou de vários Congressos e foi Professor em várias turmas de técnicos e engenheiros do SBT no Centro Nacional de Treinamento da Telebrás, em Brasília. Aposentou-se como professor em DE pela Escola de Engenharia da UFF, onde lecionou por vários anos após a privatização do Sistema Telebrás e extinção da antiga Telerj. Foi também Professor Substituto no IME, e Professor do curso à distância “Tecnologias Modernas de Telecomunicações”, promovido pelo Centro de Estudos de Pessoal (CEP) do Exército Brasileiro em convênio com a UFF.

Sumário

No Volume 4 apresentamos ao estudante de engenharia de Telecomunicações, alguns aspectos relativos a modulação em frequência (FM), utilizada principalmente em sistemas de radiodifusão (ondas VHF) e som de televisão analógica, e a modulação em fase (PM). Ambas são casos particulares de um processo geral chamado modulação em ângulo ou exponencial.

Palavras Chave

Modulação em frequência, FM, modulação em fase, PM, modulação em ângulo, modulação exponencial, frequência espectral, raias espectrais, fasor, modulação tonal, frequência instantânea, desvio de frequência, desvio máximo, índice de modulação, funções de Bessel, discriminação em frequência, Foster-Sealy, Armstrong, profundidade da modulação

Direitos Autorais

Este documento é protegido por Copyright © 2010 por seu autor listado abaixo. Você pode distribuir e/ou modificar este trabalho, tanto sob os termos da Licença Pública Geral GNU (<http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>), versão 3 ou posterior, ou da Licença de Atribuição Creative Commons (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>), versão 3.0 ou posterior.

Autor: João Baptista Bayão Ribeiro

Feedback: jribeiro@telecom.uff.br

Índice

Introdução.....	7
Conceitos Gerais.....	9
Definição:.....	9
Modulação AM:.....	9
Modulação em ângulo, ou exponencial (FM e PM):.....	9
Frequência espectral :.....	10
Frequência instantânea:	11
Representação Geral da Modulação em Ângulo.....	12
Modulação em Frequência (FM):.....	12
Modulação em Fase (PM):.....	13
Modulação em Ângulo na Prática.....	13
EXERCÍCIOS-Sequência A.....	15
Espectro de Frequências na Modulação em Ângulo.....	17
Mal entendido relativo à largura de banda de sinais modulados em ângulo:.....	18
Modulação Tonal.....	20
FM com modulação tonal.....	20
Desvio máximo de frequência:.....	21
Taxa de desvio ou índice de modulação:.....	21
PM com modulação tonal:.....	24
Desvio máximo de frequência:.....	24
Taxa de desvio ou índice de modulação :.....	24
Comportamento Geral do Espectro.....	26
Critérios para largura de banda:.....	26
Casos extremos.....	29
a) $\beta \gg 1$	29
b) $\beta < 1$	29
EXERCÍCIOS-Sequência B.....	30
Modulação FM em Faixa Estreita (NBFM).....	34
Estimação da Largura de Banda para um Sinal Modulante Composto.....	36
Casos extremos.....	37
Fórmulas aproximadas.....	37
EXERCÍCIOS-Sequência C.....	39
Métodos de Modulação em FM.....	43
Metodo indireto.....	44
Metodo direto.....	45
Laboratório 4.1.....	47
Objetivo:.....	47
Material:.....	47
Montagem:.....	47
Procedimento:.....	47
EXERCÍCIOS-Sequência D.....	50
Laboratório 4.2.....	52
Objetivo:.....	52
Material:.....	52
Montagem:.....	52
Procedimento:.....	52
Potência Total e Rendimento de um Sinal Modulado em Ângulo.....	54
Potência na modulação tonal.....	55

Rendimento da modulação.....	55
Porcentagem ou Profundidade de Modulação	57
EXERCÍCIOS-Sequência E.....	58
Discriminação de Frequências na Demodulação de Sinais FM.....	60
Análise Matemática do Discriminador de Frequências.....	61
O discriminador de Foster-Sealy.....	64
EXERCÍCIOS – Sequência F.....	66
Referências Bibliográficas e Fontes de Consulta.....	67
Apêndice A.....	68
Listagem:.....	68
Apêndice B.....	70

Introdução

Consideremos como portadora um sinal $\varphi_{\text{âng}}(t) = A \cos \Theta_p(t) = A \cos[\omega_i(t)t + \varphi_0]$.

Observamos que o argumento da função cos, no caso $\Theta_p(t) = [\omega_i(t)t + \varphi_0]$, representa um ângulo, cujo valor numérico depende de $\omega_i(t)$, t e φ_0 .

A modulação ocorre quando a informação de banda básica $x(t)$ faz variar o ângulo $\Theta_p(t) = [\text{argumento de } \varphi_{\text{âng}}(t)]$. A forma de variação do argumento define uma modulação em frequência (FM) ou em fase (PM). Como o sinal de banda básica sempre varia o ângulo $\Theta_p(t)$, esse tipo de modulação é genericamente chamada modulação em ângulo.

Matematicamente, podemos supor que $\varphi_{\text{âng}}(t) = \Re\{Ae^{j\phi}\}$. $Ae^{j\phi}$ define um fasor. Em referência a essa representação, a modulação em ângulo é também chamada modulação exponencial.

A modulação exponencial pode ser digital. A modulação digital será vista em outros volumes desta série.

É desejável que o estudante tenha o conhecimento e a possibilidade de uso de pelo menos um dos *softwares* matemáticos, como o *Scilab* ("free" -pode ser baixado gratuitamente da Internet), *Matlab*®, *Maple*® ou *MathCad*® (esses são pagos).

Conforme Wikipedia, em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Scilab> ; "*O **Scilab** é um software científico para computação numérica semelhante ao Matlab que fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas*".

Essa possibilidade irá facilitar a realização de alguns Exercícios propostos ao longo do texto.

A realização desses Exercícios, apesar de ser uma tarefa um tanto cansativa para o leitor, é uma atividade muito importante ao perfeito entendimento da matéria exposta, pois proporcionará a oportunidade para a realização de pesquisas e a fixação de conceitos relativos ao assunto em pauta. Portanto, recomendamos que não tenham pressa e tentem realizar os exercícios na sequência proposta. Alguns exercício se apresentam com respostas expostas para simples conferência, porém destaca-se que o mais importante é o processo empregado em sua execução, e a realização de gráficos, quando pedidos.

O uso de recursos informáticos para acesso à Internet também é fundamental para o estudo dos assuntos tratados no livro, pois permite a consulta de referências e fontes disseminadas pela rede, além das citadas no texto. Esses recursos podem vir na forma de um PC Desktop, Laptop, Notebook, Netbook ou Tablet.

Conceitos Gerais

Definição:

Na modulação em ângulo, também chamada exponencial, a onda modulada, na forma fasorial, pode ser encarada como a parte real de uma função exponencial da mensagem, isto é:

$$\varphi_{\text{ang}}(t) = \mathcal{R} \{ A e^{j\theta_p(t)} \} \quad (4-1)$$

onde

$\theta_p(t)$ é uma função da mensagem, isto é, do sinal modulante $x(t)$, dando a posição angular do fasor.

Dependendo de como se apresenta o sinal modulante, isto é, do tipo de função que dá origem a $\theta_p(t)$ a partir de $x(t)$, temos a modulação em frequência (FM), e a modulação em fase (PM).

Diferenças básicas entre modulação em amplitude (AM) e modulação em ângulo ou exponencial (FM e PM):

Modulação AM:

O espectro do sinal modulado é basicamente o espectro transladado da mensagem.

A largura de banda de transmissão nunca excede o dobro da largura de banda da mensagem.

A intensidade da modulação, ou potência do sinal útil, tem relação direta com a potência do sinal transmitido.

Modulação em ângulo, ou exponencial (FM e PM):

O espectro do sinal modulado não se relaciona de forma simples com o espectro da mensagem.

A largura de banda de transmissão pode ser muito maior que o dobro da largura de banda da mensagem.

A intensidade da modulação, ou potência do sinal útil, não tem relação direta com a potência do sinal sendo transmitido.

Frequência espectral :

Considerando um sinal da forma:

$$\varphi(t) = A \cos \theta(t) \quad (4-2)$$

Se

$$\theta(t) = \omega_p t + \theta_0$$

onde θ_0 e ω_p são constantes, então

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_p t + \theta_0)$$

é um sinal senoidal puro, onde ω_p é a frequência espectral de $\varphi(t)$, e θ_0 é a fase inicial, constante.

Suponha agora que:

$$\theta(t) = \omega_p t + k_p \cos \omega_m t \quad (4-3)$$

Sendo ω_p , k_p e ω_m constantes, $\omega_m < \omega_p$, e então não podemos mais afirmar que ω_p é a única frequência espectral de $\varphi(t)$, pois este não é mais um sinal senoidal puro. Podemos reconhecer que $\theta(t)$ tem uma parcela senoidal, portanto periódica, o que faz de $\varphi(t)$ um sinal também periódico, e portanto deve possuir várias frequências espectrais, não apenas ω_p .

Efetivamente, o gráfico no tempo do sinal $\varphi(t)$ [faça o Exercício A-4.2] apresenta características de periodicidade, o que permite imaginar que seu espectro de frequências é composto de várias raias espectrais.

Sendo $x(t) = \cos \omega_m t$ o sinal modulante, temos uma modulação tonal, de uma portadora $A \cos \omega_p t$, gerando um sinal modulado $\varphi(t)$, que possui um espectro com várias raias espectrais de frequência, além de simplesmente ω_p , conforme mostra a Figura 4-1.

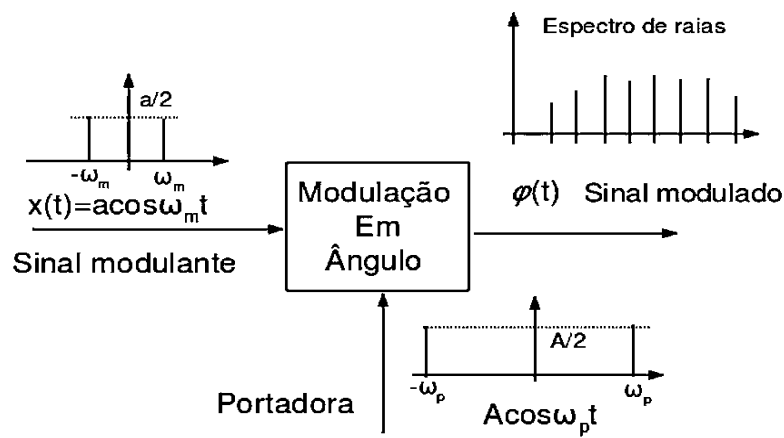


Figura 4-1

Frequência instantânea:

Considerando um fasor girante, define-se a frequência instantânea (frequência angular em rad/s) como sendo a derivada da fase em relação ao tempo. Se o fasor gira com velocidade angular constante (ω_p), então sua parte real (projeção do fasor sobre o eixo horizontal) define um sinal senoidal com frequência espectral igual a ω_p , também medida em rad/s.

Assim, se não há sinal modulante, ou seja, se o sinal de mensagem=0, a projeção do fasor sobre o eixo horizontal fica:

$$\varphi(t) = A \cos \omega_p t \quad (4-4)$$

Esta é a expressão da portadora, que é um sinal senoidal puro, de amplitude A e frequência ω_p . Desconsiderando uma fase inicial, sem perda de generalidade, a fase da portadora, nesse caso, é uma função linear do tempo:

$$\theta(t) = \omega_p(t) \times t$$

Podemos então dizer que, na ausência de modulação, ou seja, quando o sinal de mensagem=0, a frequência instantânea do sinal modulado se confunde com a frequência espectral da portadora.

$$\omega_{\text{inst}} = \omega_p$$

Representação Geral da Modulação em Ângulo

Na Equação 4-1, $\theta_p(t)$ estabelece o ângulo do fasor, que é variado de acordo com uma função do sinal modulante.

De um modo geral, a variação do ângulo do fasor $\theta_p(t)$ é da forma:

$$\theta_p(t) = \omega_p t + \text{função}[x(t)] \quad (4-5)$$

De um modo geral, a função atuando sobre $x(t)$ é linear; desta forma, pode ser considerada a saída de um sistema LTI, cuja entrada é $x(t)$.

Dessa forma,

$$\theta_p(t) = \omega_p t + k x(t) * h(t) \quad (4-6)$$

Modulação em Frequência (FM):

Vemos que se $h(t)=u(t)$, $\theta_p(t)$ é da forma:

$$\begin{aligned} \theta_p(t) &= \omega_p t + k \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = \\ &= \omega_p t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-7)$$

Desta forma, a frequência instantânea, $\omega_i(t)=d\theta_p(t)/dt$, é igual a:

$$\omega_i(t) = \omega_p + k x(t)$$

Portanto, a frequência instantânea tem uma parcela diretamente proporcional a $x(t)$, o sinal modulante. Isto define a chamada modulação em frequência (FM).

A constante de proporcionalidade, k , neste caso é chamada k_ω , sendo medida em rad/s/V. Se dividirmos $\omega_i(t)$ por 2π , temos a frequência instantânea expressa em hertz, nesse caso podemos falar em k_f , medido em hertz/V. Assim, temos:

$$\theta_{pFM}(t) = \omega_p t + k_\omega \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

O desvio de frequência é $\omega_i(t)=d\theta(t)/dt$, e o desvio máximo é definido como:

$$\Delta\omega = k_\omega |x(t)_{\max}| \text{ em rad/s ou } \Delta f = k_f |x(t)_{\max}| \text{ em hertz, sendo } k_f = k_\omega / 2\pi.$$

Modulação em Fase (PM):

Quando $h(t)=\delta(t)$ [uma função impulso], então

$$\theta(t)=\omega_p t + kx(t) \quad (4-8)$$

Assim, vemos que a parcela da fase instantânea $kx(t)$ é diretamente proporcional ao sinal modulante $x(t)$. Isto define a chamada modulação em fase (PM).

A constante de proporcionalidade, k , neste caso é chamada k_p , e é medida em rad/V. Assim como na modulação em FM, $\omega_i(t)=d\theta(t)/dt$. No caso do PM, porém:

$$\omega_{iPM}(t)=\omega_p + k_p \frac{dx(t)}{dt}$$

O desvio máximo de frequência é definido como:

$\Delta\omega=k_p |dx(t)_{\max}/dt|$ em rad/s ou $\Delta f=k_p |dx(t)_{\max}/dt|/2\pi$ em hertz, sendo k_p em rad/V.

Modulação em Ângulo na Prática

A Equação 4-6 define a forma geral da fase instantânea de um sinal modulado em ângulo. Conforme vimos nos itens acima, a forma de $h(t)$ define um tipo particular de modulação em ângulo.

Examinamos dois casos extremos, que levaram à modulação em fase (PM) e à modulação em frequência (FM).

Em se tratando de modulação analógica é mais comum o uso da modulação em frequência (FM), principalmente se tratando de rádio transmissão. O sinal modulado em frequência (FM) apresenta menor variabilidade da largura de banda de transmissão do que a modulação em fase (PM). Além disso o FM foi historicamente desenvolvido antes do que a modulação em fase para a aplicação acima mencionada.

Na prática, os moduladores em FM utilizam um filtro especial antes da modulação, atuando sobre o sinal $x(t)$, chamado filtro de pré-ênfase¹, com o objetivo

¹ A pré-ênfase provê um reforço nas frequências mais altas de $x(t)$, na transmissão, antes que o sinal seja processado pelo modulador FM. Na recepção, ocorre o processo inverso, chamado de-ênfase, equalizando assim o sinal útil. O ruído, entretanto que em grande parte é introduzido na entrada de recepção, é submetido apenas ao processo de de-ênfase, tendo bastante reduzida sua potência em altas frequências, aumentando a relação S/N na saída do sistema.

de diminuir a relação S/N na recepção.

Como na prática se utiliza um filtro de pré-ênfase, atuando sobre $x(t)$, na Equação 4-6 $h(t)$ não é igual a $u(t)$ nem $\delta(t)$, e a modulação final teórica, apesar de ser chamada FM, a rigor não é FM nem PM, em relação a $x(t)$. Entretanto, podemos ter um FM puro ou PM puro em relação a $x(t)*h(t)$, sendo $h(t)$ a resposta impulsiva do filtro de pré-ênfase.

EXERCÍCIOS-Sequência A

A-4.1-Apresente uma representação gráfica da Equação 4-1.

A-4.2-Supondo $\omega_p=2\pi 10^6 \text{ rad/s}$, $\omega_m=2\pi 10^3 \text{ rad/s}$, $A=1\text{V}$ e $a=0,8\text{V}$, trace um gráfico de $\phi(t)$ dado pela Equação 4-2. $\theta(t)$ pode ser calculado pela Equação 4-3. Faça $k_p < \pi$. Englobe pelo menos dois períodos de $\cos \omega_m t$ no seu gráfico.

A-4.3-Sendo $\phi(t)$ na Equação 4-2, qual o espaçamento entre raias consecutivas, em rad/s?

A-4.4-Explique porque uma modulação em frequência gera uma modulação em fase e vice versa, e como uma modulação em fase pode ser realizada a partir de uma modulação em frequência com a derivada do sinal modulante.

A-4.5-Explique como uma modulação em frequência pode ser realizada a partir de uma modulação em fase com a integral do sinal modulante.

A-4.6-Desenhe um gráfico aproximado da forma de onda do sinal modulado FM e PM para o sinal modulante $x(t)$ indicado na Figura 4-2. Adote os seguintes valores:

$$f_p=50\text{KHz}; \quad k_f=10^4\text{Hz/V}; \quad k_p=(\pi/2)\text{rad/V}$$

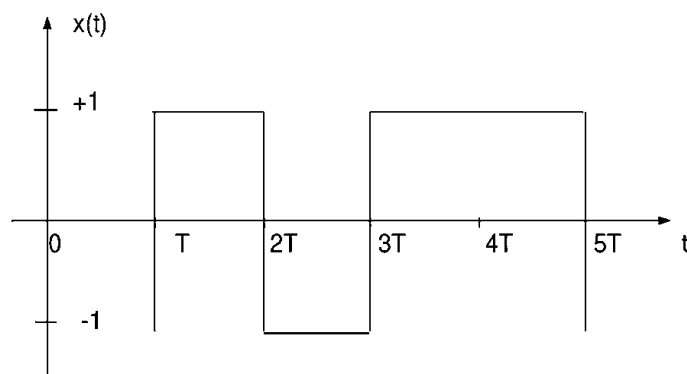


Figura 4-2

A-4.7-Desenhe um gráfico aproximado da forma de onda do sinal modulado FM e PM para o sinal modulante $x(t)$ indicado na Figura 4-3. Adote os seguintes valores:

$$f_p = 1\text{MHz}; \quad k_f = 10^5\text{Hz/V}; \quad k_p = \pi\text{rad/V}$$

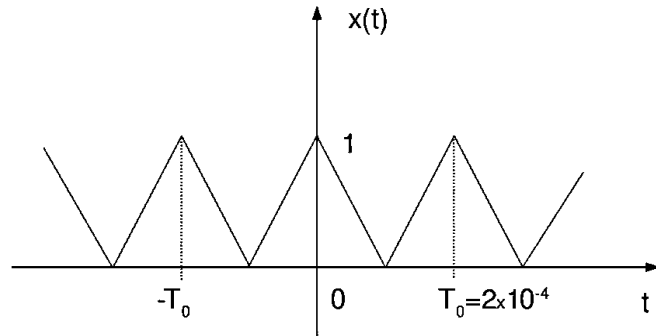


Figura 4-3

Espectro de Frequências na Modulação em Ângulo

A modulação em ângulo não é linear. Seu espectro de frequências não é função do deslocamento do espectro do sinal modulante para frequências em torno da frequência da portadora, como no AM.

Quando falamos em espectro de frequências, estamos nos referindo à frequência espectral, ou seja, o espectro é função de uma variável independente (ω ou f), e neste livro vamos usar o modelo matemático da Transformada de Fourier para representar o espectro de frequências.

Teoricamente, a modulação em ângulo atua sobre a posição angular de um fasor girante com velocidade angular constante igual a ω_p . Observe que o fasor só tem velocidade angular constante na ausência de modulação, isto é, enquanto $x(t)$ não é aplicado, ou então $x(t)=0$.

Numericamente, podemos igualar o valor de ω_p à frequência espectral de um sinal senoidal, que seria a frequência da portadora.

Matematicamente, podemos considerar a portadora como sendo a projeção do fasor girante sobre o eixo horizontal na ausência de modulação, conforme expresso na Equação 4-1, da qual resulta a Equação 4-2.

Quando ocorre a modulação em ângulo, a posição angular do fasor é variada conforme a Equação 4-6, da qual resultam as formas particulares do FM e PM, conforme as Equações 4-7 e 4-8, respectivamente. Daí, decorre a definição de frequência instantânea, como sendo a derivada do ângulo em relação ao tempo, $\omega_i = d\theta(t)/dt$.

A unidade de medida² da frequência instantânea é o rad/s ou hertz, semelhante a frequência espectral. Entretanto, é diferente da frequência espectral, apesar de ser medida na mesma unidade.

Enquanto esta última é uma variável independente, a frequência instantânea é

² A unidade de medida referida, pode ser o rad/s, que corresponde à variável ω (frequência instantânea ou espectral), ou hertz, que corresponde à variável f . Quando em situações práticas, como por exemplo a denominação de frequências de teste, a especificação de larguras de banda ou faixas de utilização de frequências por órgãos normativos, é usual a utilização do hertz como unidade de medida. As fórmulas decorrentes diferem por constantes, em geral iguais a 2π , que podem ser sempre convertidas umas nas outras, observando que $\omega = 2\pi f$ e certas definições iniciais, como por exemplo a função sinc e fórmulas de transformações entre variáveis tempo e frequência.

dependente do tempo. São utilizadas em equações diferentes, com significados diferentes.

Mal entendido relativo à largura de banda de sinais modulados em ângulo:

A confusão resultante da mistura entre os dois conceitos (frequência instantânea e espectral) foi responsável por um mal entendido, que mascarou durante alguns anos a verdadeira natureza da modulação em ângulo.

Hoje, a transmissão analógica em FM, que é um tipo de modulação em ângulo, é sinônimo de transmissão de sinais com alta fidelidade e baixo ruído, sendo largamente empregada em radiodifusão e para transmissão de sinais de áudio em televisão analógica.

Conforme vimos em Volumes anteriores, a menor largura de banda que pode ser obtida em AM corresponde à ω_m (SSB).

Nos primórdios da radio transmissão, no início do século XX, julgava-se que a transmissão de sinais em FM resultasse em sinais modulados com larguras de banda muito menores do que os sinais modulados em AM.

O raciocínio era muito simples; para obter sinais modulados com pequena largura de banda seria suficiente manter o desvio máximo da frequência da portadora, na modulação, também pequeno.

Portanto, nestas condições, a frequência da portadora, após a modulação, que apresenta um desvio máximo de frequência dado por $\Delta f = k_f x [\text{amplitude máx. do sinal modulante}]$, não iria se desviar muito de seu valor nominal.

Se este era o desvio máximo de frequência da portadora, esperava-se obter uma largura de banda comparável a $2\Delta f$, para o sinal modulado em FM. Se conseguíssemos produzir desvios razoavelmente pequenos, as larguras de banda do sinal modulado com certeza seriam bem pequenas.

Comparando-se com a modulação em AM, teríamos assim uma vantagem no uso do FM; a possibilidade da redução da largura de banda de transmissão do sinal modulado.

Este raciocínio, porém, mostrou-se falso.

Contrariando o esperado, as larguras de banda do sinal gerado conforme acima descrito eram maiores do que o desvio máximo de frequência da portadora; mesmo fazendo-se k_f bem pequeno, a menor largura de banda que se conseguia obter era igual à $2\omega_{\max}$, igual ao AM-DSB.

Portanto, de que servia a modulação FM, se as larguras de banda geradas eram sempre maiores do que o AM?

Somente após 1936, quando o Major Armstrong³ demonstrou que o FM trocava largura de banda de transmissão por melhores relações S/N no sinal demodulado, para as mesmas condições de uma modulação AM, foi reconhecida a verdadeira natureza do FM, e da modulação em ângulo.

O FM, apesar da grande largura de banda empregada atualmente (na rádio, comercial, esta largura de banda é de cerca de 200KHz, enquanto que em AM é de apenas 10 KHz), passou a ser reconhecido como sinônimo de transmissão em alta qualidade e baixo ruído.

A elevada largura de banda é viabilizada pelo uso de frequências de portadora mais altas do que em AM (a faixa de FM utiliza frequências para a portadora de 88MHz a 108 Mhz - na faixa de VHF, e a das estações AM de 535KHz a 1700KHz – na faixa de MF)-ver site http://www.willians.pro.br/frequencia/faixa_frequencia.htm

3 A estória pessoal dos homens e cientistas que trabalharam e contribuíram para as descobertas e invenções no ramo das telecomunicações, assim como em vários outros ramos da ciência, é muito interessante sob vários aspectos. O Major Armstrong, por exemplo, que foi um grande pesquisador e cientista na América do Norte, responsável por várias descobertas e invenções, terminou se suicidando, após dissipar toda a fortuna de sua família em disputas judiciais, relativas às patentes de suas invenções, principalmente em relação ao FM. Veja também a biografia do Pe. Roberto Landell de Moura, cientista e pesquisador brasileiro, que no final do século XIX e início do século XX realizou experiências em São Paulo na área de telecomunicações, que resultaram em invenções de aparelhos, muitos deles patenteados nos EUA, os quais realizavam feitos como a transmissão sem fios de sinais de voz à distância, isto alguns anos antes da invenção do telefone por Graham Bell e do telégrafo sem fios por Marconi. Desiludido com o descaso das pessoas influentes da época, o Pe. Landell terminou por abandonar suas pesquisas e invenções.

Modulação Tonal

A modulação tonal ocorre quando $x(t)$, o sinal modulante, é um sinal senoidal. Portanto, é um sinal de uma só frequência. Geralmente, este tipo de sinal é usado em situações de teste de sistemas. No caso da modulação em ângulo, é importante também porque permite a dedução de uma expressão para o espectro de frequências.

É claro que sinais modulantes reais serão bem mais complexos, sendo extremamente difícil a confecção de um modelo matemático exato para o espectro do sinal modulado, em função do espectro do sinal modulante.

Entretanto, regras gerais aplicáveis a situações limites com sinais senoidais, que se aproximem de situações típicas com sinais reais, permitem inferir regras gerais para certas características do espectro, como por exemplo a largura de banda, que podem ser aplicáveis à situações de operação normais.

FM com modulação tonal

A modulação FM, conforme já estabelecido, corresponde à uma modulação em ângulo onde a fase instantânea apresenta uma parcela proporcional à integral do sinal modulante $x(t)$, conforme a Equação 4-7. No caso em questão, de modulação tonal, em que o sinal modulante $x(t)=a\cos(\omega_m t)$, a Equação 4-7 fica:

$$\theta_{pFM}(t) = \omega_p t + k_\omega \frac{a}{\omega_m} \sin \omega_m t \quad (4-9)$$

A frequência instantânea é dada pela derivada da fase em relação ao tempo. Assim:

$$\begin{aligned} \omega_{iFM}(t) &= \omega_p + a k_\omega \cos(\omega_m t) \\ \text{ou} \\ f_{iFM} &= f_p + a k_f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (4-10)$$

As expressões acima definem os seguintes parâmetros:

Desvio máximo de frequência:

$$\begin{aligned}\Delta \omega_{FM} &= a k_{\omega} && (\text{rad/s}) \\ &\text{ou} && \\ \Delta f_{FM} &= a k_f && (\text{Hertz})\end{aligned}\tag{4-11}$$

O desvio máximo é uma função da amplitude máxima do sinal modulante. Note que, entretanto, a rapidez, ou a velocidade com que o desvio máximo é atingido depende da frequência do sinal modulante.

Na verdade, existe uma variável, denominada desvio de frequência, cujo valor máximo é Δf_m , que tem a forma do sinal modulante, e é contínua, definindo assim uma variável, que é a frequência instantânea. Esta variável é função do tempo.

Taxa de desvio ou índice de modulação:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{a k_{\omega}}{\omega_m} \\ &\text{ou} && (\text{adimensional}) \\ \beta &= \frac{a k_f}{f_m}\end{aligned}\tag{4-12}$$

Com essas definições, o sinal modulado fica:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j[\omega_p(t) + \beta \sin \omega_m t]} \\ &= A e^{j\omega_p t} [e^{j\beta \sin(\omega_m t)}]\end{aligned}\tag{4-13}$$

A segunda parcela da Equação 4-13 acima (entre colchetes) é periódica de período igual a $\omega_m/2\pi$. Portanto, pode ser expressa por uma série de Fourier, ou seja:

$$e^{j\beta \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_m t}\tag{4-14}$$

C_n representa a série de coeficientes complexos de Fourier. Assim, podemos já inferir que o espectro complexo do sinal FM, com modulação tonal, é composto por um número infinito de raias espectrais de espaçamento igual a ω_m

Utilizando a Equação 2-22, C_n pode ser escrito como:

$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn \omega_m t} dt$$

fazendo $\omega_m t = x$,

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx = J_n(\beta) \quad (4-15)$$

A Equação 4-15 define uma família de funções da variável livre β , parametrizadas pelo valor de n . Assim, temos um número infinito de funções, n variando de $-\infty$ a $+\infty$. Esse conjunto de funções é conhecido como funções de Bessel de 1ª espécie e ordem n .

É propriedade dessas funções que:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \quad (4-16)$$

Na Equação (4-16), n é um inteiro positivo. Assim, por exemplo, para $n=4$ e $n=5$,

$$\begin{aligned} J_{-4}(\beta) &= J_4(\beta) \\ J_{-5}(\beta) &= -J_5(\beta) \end{aligned} \quad e$$

A Figura 4-4 apresenta uma visão gráfica dessa família de funções, para $0 < n < 9$ e positivo (lembrando que n representa o valor do harmônico da série de Fourier), e portanto é um inteiro positivo ou negativo) e, no caso da Figura 4-4, $0 < \beta < 10$ (β é o índice de modulação FM, assumindo valores contínuos tipicamente na faixa apresentada).

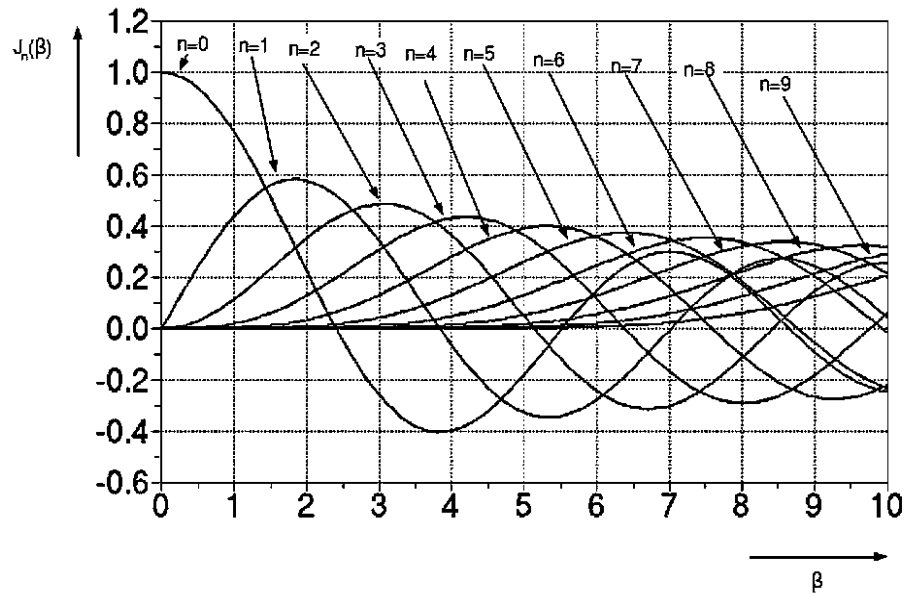


Figura 4-4

Aplicando-se este resultado à Equação (4-13), tem-se:

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = A e^{j\omega_p t} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \right] = A \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{(\omega_p + n\omega_m)t}$$

Como

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = \mathcal{R}\{\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t)\}$$

então

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_p + n\omega_m)t \quad (4-17)$$

A equação (4-17) nos mostra que o sinal modulado tem seu espectro de frequências composto por um número infinito de raias espectrais, centradas em ω_p , o espaçamento entre raias sendo ω_m . A amplitude de cada raia é dado por $A J_n(\beta)$, respeitando-se a Equação 4-16; portanto a amplitude na frequência da portadora é $A J_0(0)$.

PM com modulação tonal:

O sinal modulante, da mesma forma que para o FM, será suposto um sinal senoidal. Por conveniência, neste caso $x(t) = a \sin \omega_m t$. Aplicando-se a definição de sinal modulado em fase, à partir da Equação 4-8, temos que:

$$\theta_{pPM}(t) = \omega_p t + k_p a \sin \omega_m t \quad (4-18)$$

Portanto, a frequência instantânea será:

$$\begin{aligned} \omega_{iPM}(t) &= \omega_p + \omega_m a k_p \cos(\omega_m t) \\ \text{ou} \\ f_{iPM} &= f_p + f_m a k_p \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (4-19)$$

Desvio máximo de frequência:

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{PM} &= a \omega_m k_p \quad (\text{rad/s}) \\ \text{ou} \\ \Delta f_{PM} &= a f_m k_p \quad (\text{Hertz}) \end{aligned} \quad (4-20)$$

Da mesma forma que no FM, o índice de modulação ou taxa de desvio é definido como a relação entre o desvio máximo de frequência e a frequência do sinal modulante. Assim

Taxa de desvio ou índice de modulação :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega_m a k_p}{\omega_m} = a k_p \quad (\text{adimensional}) \\ \text{ou} \\ \beta &= \frac{f_m a k_p}{f_m} = a k_p \end{aligned} \quad (4-21)$$

A expressão do sinal PM fica

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{PM}(t) &= A e^{j[\omega_p t + a k_p \sin \omega_m t]} \\ &= A e^{j\omega_p t} [e^{j\beta \sin(\omega_m t)}] \end{aligned} \quad (4-22)$$

Utilizando o desenvolvimento anterior, já efetuado para o FM, temos:

$$\varphi_{PM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_p + n \omega_m) t \quad (4-23)$$

Assim, o espectro de frequências do sinal modulado em PM é da mesma forma que para o sinal FM. As diferenças observadas estão nos valores numéricos em si e na forma em como as raízes se comportam em relação à variação da amplitude e da frequência do sinal modulante.

Comportamento Geral do Espectro

Observando-se que as raia ímpares são simétricas em relação à ω_p , e que as raia pares são simétricas em relação ao eixo vertical em ω_p (conforme a Equação 4-16), as raia ímpares são defasadas de 180° e as raia pares de 0° .

Considerando ainda que, para um certo valor de β , a amplitude de cada raia [que depende de $J_n(\beta)$] sempre decresce a partir de um certo valor de n (conforme pode ser observado do gráfico da Figura 4-4), o número de raia com amplitude significativa no espectro depende do valor de β .

Para valores de $\beta < 0,25$, praticamente temos apenas a portadora (AJ_0) e as duas primeiras raia (AJ_1 e AJ_{-1}) com valores significativos.

Para valores muito grandes de β ($\beta > 50$), temos várias raia com valores significativos. Para valores particulares de β , ocorrem anulações nos valores das raia ($J_n(\beta)=0$), conforme mostra o Quadro 3 para J_0 , J_1 e J_2 :

Quadro 3

Zeros das funções de Bessel		
$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$
β	β	β
2,4	3,8	5,1
5,5	7,0	8,3
8,7	10,2	11,5
11,8	13,3	14,7
14,9	16,5	16,9

Crítérios para largura de banda:

Apesar das amplitudes das raia no espectro de uma modulação em ângulo apresentar uma variabilidade com n , a partir de um certo valor de n elas diminuem monotonicamente. Este valor de n , a partir do qual as amplitudes sempre diminuem, depende de β e pode ser usado como critério para limitar o número de raia significativas, e portanto definir uma largura de banda.

Este critério pode ser baseado na amplitude relativa de cada raia, que é proporcional a $J_n(\beta)$. Quando, para um dado β , o valor de $J_n(\beta)$ começa a decair monotonicamente com n , isto é, torna-se cada vez menor com o aumento de n , sem nunca aumentar; pode-se estabelecer um critério para *raia com amplitude*

significativa.

Assim, as *raias com amplitude significativa* são aquelas com $n < \text{valor limite}$ a partir do qual o valor de $J_n(\beta)$ decresce monotonicamente, sendo sempre inferior a um número ε .

É costume se estabelecer dois (2) valores limites para ε : $\varepsilon=0,1$ e $\varepsilon=0,01$. O número de raias significativas será, evidentemente, maior para $\varepsilon=0,01$ que para $\varepsilon=0,1$.

Os valores de $J_n(\beta)$, para um dado β , variando em função de n podem ser traçados para se verificar para qual valor de n ele decai monotonicamente e é menor do que o ε estabelecido.

Como exemplo, a Figura 4-5 apresenta plotagem de valores de $J_n(10)$ para valores acima de $n=10$, podendo-se observar o decaimento monotônico de $J_n(10)$ a partir de $n=10$. É claro que sendo n uma variável discreta, assumindo apenas valores inteiros, o gráfico da Figura 4-5 apresenta uma interpolação artificial por conta da função “plot” usada em seu traçado. Desta forma, os valores de $J_n(10)$ são verdadeiros apenas para n inteiro.

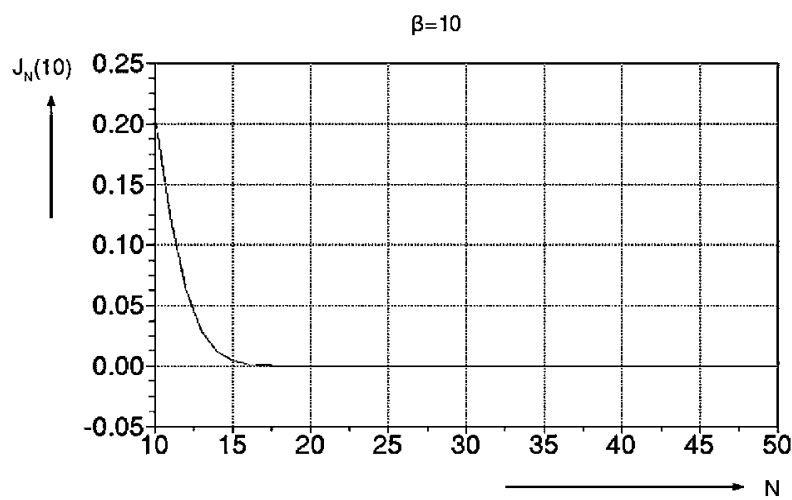


Figura 4-5

O gráfico da Figura 4-5 foi obtido a partir da listagem apresentada no apêndice A. Esta listagem é um arquivo `txt.sci`, que pode ser executado em Scilab para gerar o gráfico acima mencionado. Alterando-se o valor do parâmetro “beta” na listagem, pode-se traçar o gráfico para outro valor de β .

O gráfico da Figura 4-6 foi obtido utilizando-se recursos do próprio Scilab, utilizando-se a função “zoom” sobre o gráfico anterior. Assim, foi ampliada a parte do gráfico correspondente a $n=12$ a 24.

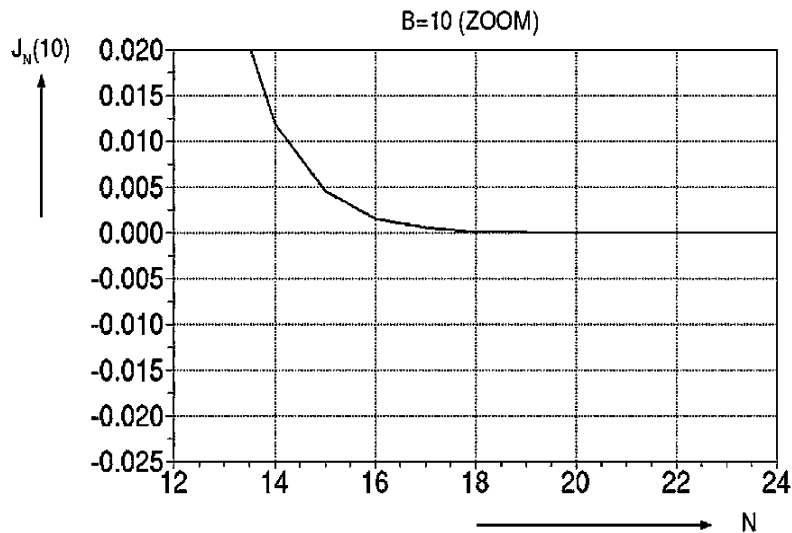


Figura 4-6

À partir do gráfico da Figura 4-6, vê-se que, considerando-se um valor para ϵ igual a 0.01, as raías acima de $n \geq 14$ podem ser desprezadas. Outros valores para ϵ podem ser considerados, cada qual definindo um certo critério. Um critério usual é considerarmos um valor intermediário para ϵ , como por exemplo $\epsilon=0,05$.

Portanto, um critério para a largura de banda (que na prática tem que ser limitada a um certo valor) seria encontrado desprezando-se as raías a partir de um certo n , cujas amplitudes são muito pequenas, inferiores a um valor ϵ .

Assim, define-se uma função $n(\beta)$ como sendo o número de raías significativas. A largura de banda é então:

$$LB=2n(\beta) \quad (4-24)$$

Para o cálculo de n utiliza-se o critério acima explicado, com um certo ϵ .

Casos extremos

a) $\beta \gg 1$

Aplicando-se a listagem do apêndice A, se, por exemplo $\beta=50$, $n(\beta)=56$ para $\epsilon=0,01$. Assim, segundo a Equação 4-24, $LB=112f_m$. Suponha $a=2$ V, e $f_m=8$ KHz. Neste caso, $LB=112 \times 8=896$ KHz. Observando que $2\beta f_m=2\Delta_f f_m/f_m$, podemos escrever $2\beta f_m=2\Delta_f$. Pelos valores considerados, vê-se que $2\Delta_f=100 \times 8=800$ KHz. Assim, para uma estimativa inicial, rápida, a LB pode ser suposta $2\Delta_f$.

b) $\beta \ll 1$

Neste caso, do gráfico da Figura 4-4 vê-se que $J_1(\beta) \approx \beta$, $J_0(\beta) \approx 1$ e $J_n(\beta) \approx 0$ para $n > 1$. Isto leva a se considerar como significativa apenas a 1ª raia. Portanto, $LB=2f_m$.

Os casos acima citados são extremos. Correspondem a $\beta \ll 1$ (NBFM) ou $\beta \gg 1$ (WBFM - "Wide Band FM")

EXERCÍCIOS-Sequência B

B-4.1-Um sinal modulado em ângulo, com modulação tonal, gera um espectro de frequências, descrito no domínio da frequência espectral ω . Ao mesmo tempo, a modulação gera um frequência instantânea que varia entre dois valores $\omega_{\min}$ e $\omega_{\max}$. Conforme foi visto, há uma diferença conceitual entre frequência espectral e frequência instantânea. Apesar disso, há neste caso mais uma diferença fundamental entre elas. Qual é essa diferença?

B-4.2-No FM quasi-estático, o sinal modulante varia tão lentamente que a frequencial espectral e a frequência instantânea se confundem, tornando impossível distinguir uma da outra, do ponto de vista do aspecto dos respectivos gráficos. Apresente uma justificativa para esse fato.

B-4.3-Um sistema recebe um sinal modulado em ângulo. Supondo modulação tonal, mostre que, a partir do sinal modulado recebido, é impossível determinar se foi feita uma modulação em frequência ou em fase.

B-4.4-Um sistema de modulação em ângulo empregando modulação tonal, possui a opção de utilizar FM ou PM. Considerando $f_p=10\text{MHz}$, a constante de modulação em frequência $k_f=10^4\text{Hz/V}$, e a constante de modulação em fase $k_p=\pi/4\text{rad/V}$, calcule e faça um esboço do espectro de frequências do sinal modulado, nos dois casos. Considere também que a amplitude máxima do sinal modulante é 1V, e sua frequência é 5kHz.

B-4.5-Compare os espectros de frequência de um sinal FM e um sinal PM com modulação tonal, onde

$$f_p=10\text{MHz}, f_m=5\text{kHz}, k_f=10^4\text{Hz/V}, k_p=1/2\text{rad/V}, a=5\text{V}.$$

B-4.6-Compare os espectros FM e PM com modulação tonal sendo $f_p=10\text{MHz}$, $f_m=5\text{KHz}$, $k_f=10^4\text{Hz/V}$, $k_p=1/2\text{rad/V}$ e $a=2\text{V}$.

B-4.7-Compare os espectros FM e PM com modulação tonal sendo

$f_p=10\text{MHz}$, $f_m=1\text{KHz}$, $k_f=10^4\text{Hz/V}$, $k_p=1/2\text{rad/V}$ e $a=2\text{V}$.

B-4.8-Considerando dois casos diferentes para a modulação FM:

Caso 1: A frequência do sinal modulante é fixa, sendo variável sua amplitude.

Caso 2: A amplitude do sinal modulante é fixa, sendo variável sua frequência.

O que você pode comentar em relação a largura de banda e o espaçamento entre raiais nos casos acima? Repita para PM, estabelecendo valores adequados para amplitude e frequência, de modo a ressaltar as diferenças entre os dois tipos de modulação para os dois casos acima citados. Relate as diferenças observadas.

B-4.9-Um sistema modulado em fase é utilizado para transmissão de um sinal digital, onde uma amostra deste sinal está mostrada na Figura 4-7. Obtenha o sinal demodulado. Considere $k_p=\pi/2\text{rad/V}$. Comente sobre o resultado obtido. O que você observa de extraordinário?

B-4.10-Calcule a potência média total, a potência da portadora e a potência das bandas laterais para um sinal modulado em ângulo, com modulação tonal. Analise o rendimento da modulação.

R:

Potência média total:

$$P_{\text{total}} = A^2/2W$$

Potência média na frequência da portadora:

$$P_{f=f_p} = \frac{A^2}{2} J_0^2(\beta)$$

Potência média das bandas laterais:

$$P_{bl} = A^2/2 [1 - J_0^2(\beta)]$$

Rendimento da modulação:

$$\eta = \frac{P_{util}}{P_{total}} = 1 - J_0^2(\beta)$$

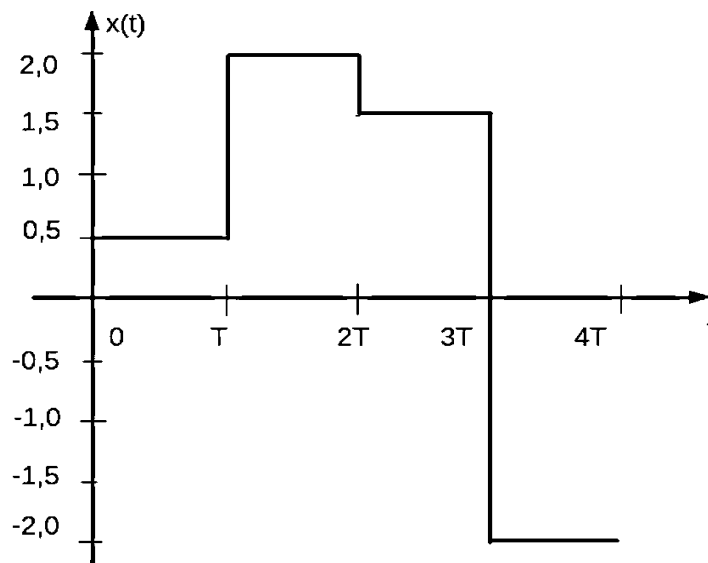


Figura 4-7

B-4.11-Faça uma tabela para valores de $J_n(\beta)$, n variando de 0 a 14 e $\beta=0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ e 10.0 . Despreze os valores de $J_n(\beta) < 0,01$.

B-4.12-Apresente gráficos de espectros de linha, considerando modulação tonal para FM, comparando a variação destes espectros quando:

a) f_m é fixo (por exemplo, $f_m=1\text{Khz}$), e b) f_m é variável (começando com $f_m=10\text{Khz}$ para $\beta=0.2$), e β assume os valores de $0.2, 1.0, 5$ e 10 . Despreze as linhas espectrais para as quais $J_n(\beta) < 0,01$. Comente os resultados obtidos.

B-4.13-Apresente uma representação fasorial para um sinal modulado em FM com modulação tonal. Suponha um valor hipotético para β , por exemplo, $7,0$. Apresente as raiais até $J_n(\beta)$ imediatamente $< 0,01$. Para simplificar, considere a

portadora com fase inicial igual a zero.

B-4.14-Mostre que FM e PM são casos particulares de uma modulação geral, que é a modulação em ângulo ou modulação exponencial.

B-4.15-Demonstre que, devido a pré-ênfase, o sistema se comporta como um sistema modulado em frequência para baixas frequências do sinal modulante, e como um sistema modulado em fase para altas frequências do sinal modulante.

Modulação FM em Faixa Estreita (NBFM)

Para valores de k_ω ou k_f muito pequenos,

$$|k_\omega \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau| \ll 1$$

Sendo o valor acima muito pequeno, a expressão

$$\hat{\varphi}(t)_{\text{FM}} = A e^{j[\omega_p t + k_\omega \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau]}$$

do sinal modulado em frequência pode ser aproximada por:

$$\hat{\varphi}(t)_{\text{FM}} = A e^{j\omega_c t} \left(1 + j k_\omega \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) \quad (4-25)$$

e então

$$\varphi(t)_{\text{FM}} = \Re \{ \hat{\varphi}(t)_{\text{FM}} \} = A \cos \omega_p t - A \left[k_\omega \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] \sin \omega_p t$$

que caracteriza o chamado NBFM (FM faixa estreita, em inglês as iniciais de “Narrow Band FM”) e que apresenta características de uma modulação linear. Considerando uma modulação tonal, temos:

$$\varphi(t)_{\text{FM}} = A [\cos \omega_p t - \beta \sin \omega_m t \sin \omega_p t] \quad (4-26)$$

Como o valor máximo de $\sin \omega_m t = 1$, é preciso que o valor de $\beta \ll 1$. Para essa situação, normalmente $\beta < 0,25$.

A expressão geral para o NBFM permite identificar um esquema de geração de

sinais FM utilizando moduladores balanceados, empregados também na geração de sinais AM-DSB-SC. Este esquema está apresentado na Figura 4-8.

Daí, se conclui que a LB de um sinal NBFM é $2\omega_m$.

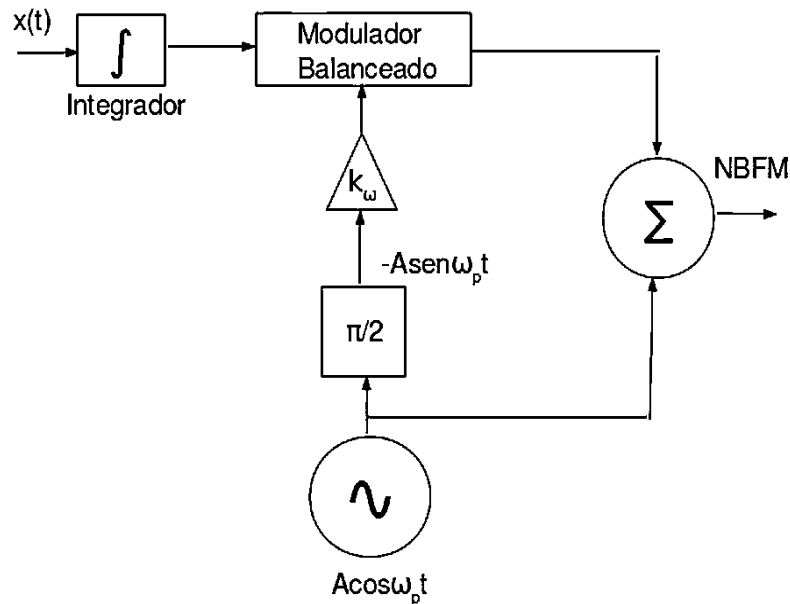


Figura 4-8

O espectro frequências do sinal NBFM pode ser calculado considerando-se que:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad \text{e} \quad \text{que} \quad (4-27)$$

$$z(t) \sin \omega_p t \leftrightarrow \frac{j}{2} [Z(\omega - \omega_p) - Z(\omega + \omega_p)]$$

Daí, conclui-se que

$$\phi_{\text{NBFM}}(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \frac{Ak_\omega}{2} \left[\frac{X(\omega - \omega_p)}{\omega - \omega_p} - \frac{X(\omega + \omega_p)}{\omega + \omega_p} \right] \quad (4-28)$$

Da Equação 4-28 vê-se que a largura de banda do sinal modulado FM faixa estreita (NBFM) é $2\omega_m$.

Estimação da Largura de Banda para um Sinal Modulante Composto

Seja $x(t)$ um sinal modulante composto por vários sinais senoidais.

Por hipótese, $x(t)$ é um sinal limitado em frequência, ou seja, a frequência máxima do espectro é ω_m [veja a Figura 3-4 para uma representação nominal do espectro de $x(t)$].

A ideia é estimar a largura de banda do sinal modulado em ângulo a partir de uma condição de pior caso.

Esta condição compara a LB gerada por vários sinais modulantes senoidais de mesma amplitude e frequências diferentes.

Pode ser verificado, para ϵ entre 0.1 e 0.01, que $n(\beta) \approx \beta + \alpha$.

Daí, $LB \approx 2 n(\beta) \cdot \omega_m \approx 2(\alpha \omega_m / \omega_m + \alpha) \cdot \omega_m = 2(\alpha \omega_m + \alpha \omega_m)$.

Agora, supondo frequências de mesma amplitude a , a frequência de maior valor claramente produz a maior largura de banda. Portanto, dado um sinal composto de várias frequências, a de maior valor gera a maior largura de banda.

Voltando agora a $x(t)$, duas suposições são feitas:

- a) Que a máxima frequência do espectro possa ocorrer com a máxima amplitude.
- b) Que o princípio da superposição possa ser aplicado à modulação em ângulo.

A hipótese a) corresponde à situação de pior caso.

A hipótese b) a rigor não é verdadeira, pois a modulação em ângulo é não-linear. Entretanto, as bandas laterais significativas geradas por produtos de batimento estão contidas na faixa de frequências das raias geradas pela maior frequência, pouco contribuindo para o aumento da largura de banda.

Assim, a LB do sinal modulado em ângulo por um sinal $x(t)$ composto será estimada a partir da situação de pior caso, em que se supõe que a frequência máxima de $x(t)$ consegue gerar a maior LB.

Para isto, se define a taxa de desvio D (equivalente ao índice de modulação).

Desta forma, para FM, temos

$$D = \frac{|x(t)_{\max}| \times k_{\omega}}{\omega_{\max}} \quad (4-29)$$

E para PM, temos

$$D = |x(t)_{\max}| \times k_p \quad (4-30)$$

Então, a LB do sinal modulado fica:

$$LB = 2n(D) \times \omega_{\max} \quad (4-31)$$

A Equação 4-31 é equivalente a Equação 4-24, em se tratando de um sinal modulante $x(t)$ não senoidal. Nas equações 4-29 e 4-30, $x(t)_{\max}$ significa a amplitude da maior frequência de $x(t)$.

Casos extremos

$$\text{Se } \beta, \text{ ou } D \gg 1 \quad LB \approx 2\Delta\omega$$

Para o FM, este tipo de modulação é chamada WBFM (do inglês “Wide Band FM”, ou FM de banda larga)

$$\text{Se } \beta, \text{ ou } D \ll 1 \quad LB \approx 2\omega_m$$

Para o FM, este tipo de modulação define o NBFM (do inglês “Narrow Band FM”, FM de banda estreita). Para PM, define o NBPM.

Fórmulas aproximadas

Considerando que para valores intermediários de β ou D , obtém-se valores exagerados usando as fórmulas acima, para mais ou para menos, criou-se as expressões abaixo, que podem ser usadas quando a LB pode ser calculada de forma rápida, obtendo-se valores aproximados, apropriados para cálculos sem muito compromisso.

A Equação 4-33 fornece valores um tanto maiores que a Equação 4-32, sendo uma questão de escolha, motivada pelo bom-senso ou pela experiência, o uso de uma ou de outra; a Equação 4-32 (conhecida também como fórmula de Carson) calcula uma LB que engloba aproximadamente 98% da potência total:

$$LB=2(\beta+1)\omega_m \quad (4-32)$$

$$LB=2(\beta+2)\omega_m \quad (4-33)$$

Para sinais não senoidais, usa-se D em lugar de β . As Equações 4-32 e 4-33 são válidas tanto para FM quanto para PM, respeitando-se o modo de calcular β ou D. Em sendo necessário o cálculo mais preciso, deve-se usar a expressão 4-31, onde n pode ser calculado, por exemplo, pela rotina do apêndice A. Mesmo assim, deve-se decidir entre $\varepsilon=0.1$ ou $\varepsilon=0.01$, ou um valor intermediário.

EXERCÍCIOS-Sequência C

C-4.1-Se $A=1$, $\beta=1$, $f_{\max}=1$ KHz e $f_p=100$ KHz, faça um gráfico do espectro de raios (cada raia representa a amplitude em V da componente respectiva), considerando FM (considere a Equação 4-17). Represente no gráfico apenas $J_n(1) > 0,01$. Qual a LB deste sinal? Qual das fórmulas aproximadas melhor representam esta LB? Qual o rendimento desta modulação?

C-4.2-Repita o exercício C-4.1 considerando $\beta=10$.

C-4.3-Para uma estação FM comercial, $\Delta f=75$ KHz, e $f_{\max}=15$ KHz. Qual o valor estimativo de D, e qual a LB? Considere todos os possíveis critérios, e assim justifique um valor aproximado de 200KHz para a LB de recepção de um receptor comum.

C-4.4-A Figura 4-9 apresenta um diagrama em blocos conceitual de um discriminador, usado na demodulação de sinais FM. Apresente uma justificativa para este esquema, baseado na definição de um sinal modulado em FM (ver Equações 4-4 e 4-7).

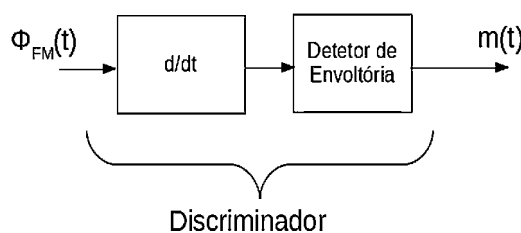


Figura 4-9

C-4.5-Apresente uma justificativa plausível para o fato do FM ser mais preferido para as transmissões de rádio difusão do que o PM.

C-4.6-Os filtros de pré-ênfase e de ênfase usados em FM podem ser moldados por características de transferência dadas por:

1-pré-ênfase: (FPA): $H_{pe}(f)=1+j2\pi\tau_s$

2-de-ênfase: (FPB): $H_{de}(f)=1/(1+j2\pi\tau_s)$

O valor de τ_s pode ser considerado 50ms.

Traçar os gráficos das funções de Bode dessas funções de transferência.

C-4.7-Uma modulação FM é feita com um sinal modulante $m(t)$ para o qual $|m(t)|_{\max} = 10 \text{ V}$ e $\langle m(t) \rangle = 0$. Calcule a LB do sinal modulado se $f_{\max} = 10 \text{ KHz}$ e $k_f = 10^5 \text{ Hz/V}$.

C-4.8-Uma modulação FM é feita com um sinal modulante $m(t)$ para o qual $|m(t)|_{\max} = 1 \text{ V}$ e $\langle m(t) \rangle = 0$. Calcule a LB do sinal modulado se $f_{\max} = 10 \text{ KHz}$ e $k_f = 10^4 \text{ Hz/V}$.

C-4.9-Uma modulação FM é feita com um sinal modulante $m(t)$ para o qual $|m(t)|_{\max} = 2,5 \text{ V}$ e $\langle m(t) \rangle = 0$. Calcule a LB do sinal modulado se $f_{\max} = 10 \text{ KHz}$ e $k_f = 10^4 \text{ Hz/V}$.

C-4.10-Estime a LB para FM e PM para o sinal modulante $x(t)$ mostrado na Figura 4-10, considerando $k_f = (1/2) \times 10^4 \text{ Hz/V}$ e $k_p = \pi/4 \text{ rad/V}$.

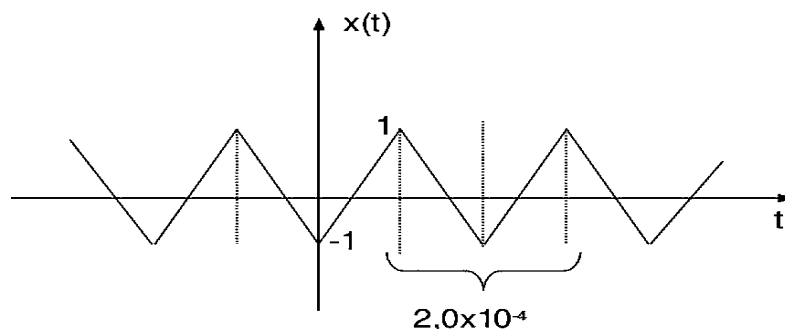


Figura 4-10

C-4.11-Estabeleça a relação $LB/f_{\max}$ para $\beta=0.3$, 3.0 e 30, utilizando as fórmulas de aproximação. Repetir usando a Equação 4-24 e comparar esse resultados. Considere um valor mais conservativo para ϵ , como 0.01 por exemplo.

C-4.12-Com o diagrama em blocos da Figura 4-8 implementa-se o chamado modulador de Armstrong, capaz de gerar NBFM. Mostre a modificação necessária para que o diagrama em blocos da Figura 4-8 gere o sinal NBPM.

C-4.13-Utilize o modulador de Armstrong e um circuito multiplicador de frequências para gerar um sinal WBFM. Demonstre seu funcionamento para um multiplicador de lei quadrática⁴.

C-4.14-A Figura 4-11 apresenta o resultado de uma simulação em computador do espectro de módulo de um sinal modulado em FM, com as seguintes características:

modulação tonal, $A=1$ (amplitude da portadora), $\beta=1$, $f_{\max}=200\text{Hz}$, $f_p=10\text{KHz}$.

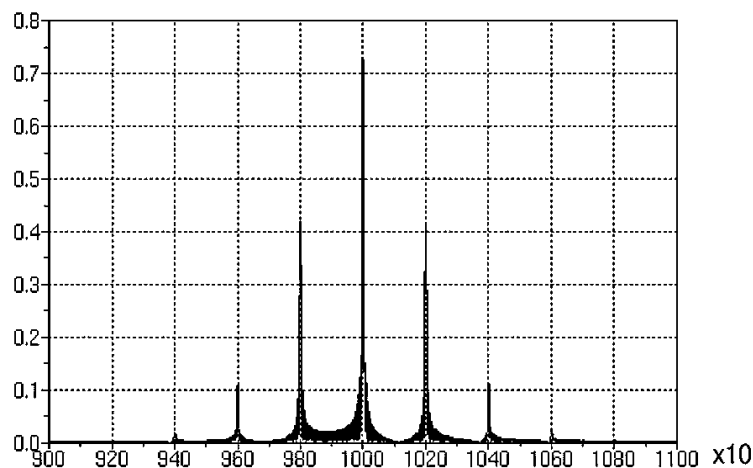


Figura 4.11

O espectro de raios mostrado na Figura 4.11 foi obtido por um programa capaz de calcular a transformada de Fourier numericamente, para uma função $f(x)$ truncada entre os limites a e b , ($b>a$), e plota o gráfico resultante desde f_1 Hz a f_2

⁴ Um multiplicador de lei quadrática pode ser obtido considerando-se que a saída seja o quadrado do sinal de entrada.

Hz ($f_2 > f_1$). A função $f(x)$ é arbitrária (Ver Apêndice B). No caso da Figura 4-11, a função $f(x)$ representa um sinal modulado FM com as características acima especificadas. O Exercício consiste em:

a) Refazer manualmente o traçado do espectro do sinal da Figura 4-11, calculando a amplitude de cada raia e o valor de $|J_n(1)| > 0,01$.

b) Analisar a LB expressa pelo espectro da Figura 4-11 e o rendimento da modulação.

c) A Figura 4-11 foi gerada pela rotina do Apêndice B, escrita com comandos aplicáveis ao software "Scilab". Conforme se observa, a integral de Fourier é calculada pelo método de Euler. Outras abordagens podem ser usadas para gerar o espectro. Um deles é usar métodos mais eficientes de integração. Refazer a rotina indicada obtendo resultados semelhantes com menor tempo de execução e gráficos melhores.

C-4.15-A Equação $\phi(t) = 10\sin(10^8 t + 2,4\sin 10^4 t)$ representa um sinal modulado em ângulo. Para esse sinal, responda:

a) Qual o tipo de modulação empregada?

b) Qual as frequências da portadora e do sinal modulante?

c) Qual o índice de modulação e o desvio de frequência do sinal modulado?

d) Qual a potência dissipada pelo sinal modulado sobre uma carga de 100Ω ?

e) Qual o espectro de frequências para o sinal modulado?

Métodos de Modulação em FM

Pela definição do sinal modulado em FM, a frequência instantânea da portadora varia como uma função linear do sinal modulante. Portanto, os circuitos usados na modulação realizam uma conversão entre a amplitude do sinal modulante e a frequência da portadora, seguindo a Equação 4-34:

$$\begin{aligned}\omega_{i(t) \text{ FM}} &= \omega_p + k_\omega x(t) \\ \text{ou} \\ f_{i(t) \text{ FM}} &= f_p + k_f x(t)\end{aligned}\tag{4-34}$$

Isto significa que, quando $x(t)=0$, ou seja, quando não há modulação, a frequência da portadora é f_p Hz. Neste caso, há uma coincidência numérica entre a frequência instantânea e a frequência espectral da portadora.

Quando $x(t)>0$, as frequências instantâneas são maiores do que f_p , com valores significativos de amplitude até $f_p+\Delta f$, e quando $x(t)<0$ temos frequências instantâneas menores do que f_p , com valores significativos desde $f_p-\Delta f$ até f_p . Δf é o desvio máximo de frequência.

O espectro de frequências, no entanto, se estende além de $|\Delta f|$, para mais e para menos.

Além disso, quando o sinal modulante é periódico, a frequência instantânea é uma variável contínua do tempo, enquanto que a variável frequência espectral é uma variável discreta de ω . Por exemplo, no caso da modulação tonal, a frequência instantânea varia senoidalmente entre $f_p-\Delta f$ e $f_p+\Delta f$, e o espectro tem componentes de $LB/2-f_p$ e $f_p+LB/2$, sendo $LB \geq 2\Delta f$.

Em se tratando de FM faixa estreita, $\beta \ll 1$, e $\Delta f < f_{\max}$. Nesse caso, $LB = 2f_{\max}$. No caso de FM faixa larga, $\beta \gg 1$, e a LB pode ser estimada usando-se a Equação 4-24 em conjunto com os critérios de amplitudes de raias significativas, ou usando as fórmula de aproximação. Para valores muito grandes de β ($\beta > 50$), a aproximação pode ser $LB = 2\Delta f$.

Dois métodos são genericamente usados para a modulação; o método indireto ou o método direto.

Metodo indireto

No método indireto, costuma-se gerar um sinal NBFM, a partir de uma portadora de alta estabilidade em frequência (um cristal de quartzo, por exemplo), como faz o modulador de Armstrong, e a seguir usam-se circuitos multiplicadores de frequência e conversores para ajustar o valor final do desvio de frequência e da frequência da portadora.

A Figura 4.12 apresenta um diagrama em blocos de um possível sistema modulador de FM, usado para gerar um sinal modulado a partir de um modulador NBFM, semelhante ao apresentado na Figura 4-8.

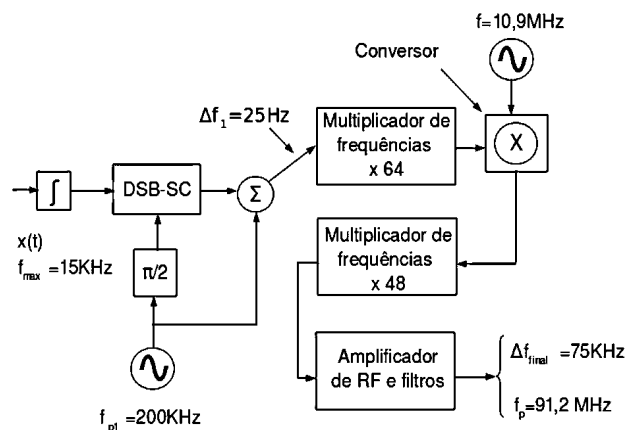


Figura 4-12

Partindo das Equações 4-25 e 4-26, considerando um valor inicial de $\Delta f = 25\text{Hz}$, para $A = 2\text{V}$, tem-se $k_m = 12.5\text{Hz/V}$.

Assim, o ajuste de parâmetros do modulador de Armstrong permite regular o desvio máximo inicial. Assim, o sinal inicial NBFM possui um Δf inicial de 25Hz. O objetivo é obter um desvio final de 75KHz. Este desvio final pode ser obtido por circuitos multiplicadores de frequência, com um fator de 3000 vezes.

Dois blocos de multiplicadores são usados, respectivamente 64 e 48 vezes. O fator final é 3072. (O fator de cada bloco é um múltiplo de 2).

Os blocos multiplicam todas as frequências aplicadas em sua entrada, inclusive a

frequência da portadora, cujo valor inicial de f_p é 200KHz.

Assim, após o primeiro bloco multiplicador temos um sinal com $\Delta f=1600\text{Hz}$ e $f_p=12.800\text{KHz}$. O objetivo é obter uma portadora final com $f_p=91.2\text{MHz}$.

Assim, a frequência de portadora na entrada do multiplicador de 48 vezes tem que ser 1.9MHz. Portanto, utilizaremos um conversor de frequências. Este último não afeta o desvio de frequência do sinal na entrada, apenas provoca o deslocamento. No caso, utilizando a diferença = 1.9 MHz, o segundo gerador é ajustado para 10.9MHz ($12.8-1.9=10.9$).

Com esses valores, consegue-se a portadora final em $f_p=91.2\text{MHz}$ e desvio final de 76.800Hz, aproximadamente 75KHz que é um valor típico comercial.

Metodo direto

No método direto, circuitos eletrônicos capazes de variar a frequência de um oscilador diretamente proporcional à uma tensão ou voltagem de controle são empregados com o objetivo de implementar a Equação 4-34.

Podemos dizer que o método direto trabalha o modelo de frequência instantânea, ou seja, ele obriga diretamente a frequência instantânea de um circuito oscilador a variar no tempo, conforme a Equação 4-34. O desvio máximo gerado pode ser característico de um sinal NBFM ou WBFM.

Uma forma simples de gerar um sinal FM consiste em aplicar o sinal modulador diretamente à um VCO (Voltage Controlled Oscillator), conforme mostrado na Figura 4.13.

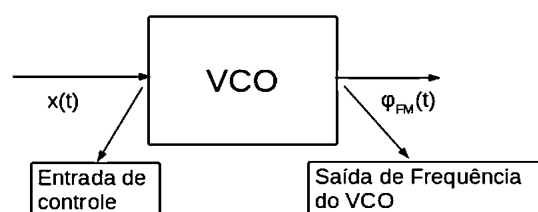


Figura 4-13

Uma tensão de controle, representando o sinal da mensagem $x(t)$, é aplicado à entrada de controle do VCO, e o sinal de saída, $\phi_{FM}(t)$ é uma onda senoidal de amplitude constante, cuja frequência é idealmente uma função linear da tensão de controle.

Quando não existe mensagem, ou a tensão de entrada $x(t)=0$, a onda de saída tem a frequência da portadora, f_p .

Quando a tensão de entrada existe, a frequência instantânea do sinal de saída varia acima e abaixo da frequência central da portadora, sendo expressa por:

$$f_{inst FM}(t) = f_p + K_{VCO} x(t)$$

onde K_{VCO} é o ganho de voltagem/frequência do VCO expresso em unidades Hz/V, e a quantidade $K_{VCO}x(t)$ é o desvio de frequência instantânea.

A fase instantânea do sinal de saída é igual à 2π multiplicado pela integral da frequência instantânea:

$$\theta_{inst FM}(t) = 2\pi f_p(t) + 2\pi K_{VCO} \int_0^t x(t) dt$$

Portanto, o sinal de saída FM será dado por:

$$\phi_{FM}(t) = A \cos \left[2\pi f_p(t) + 2\pi K_{VCO} \int_0^t x(t) dt \right] \quad (4-35)$$

Comparando-se com a Equação 4-7, verifica-se que a expressão acima efetivamente representa um sinal modulado em FM, onde K_{VCO} é a constante do modulador expressa em Hz/V.

Geralmente, a estabilidade de frequência dos osciladores usados nos circuitos de modulação direta é baixa, mesmo quando se parte de circuitos que geram NBFM. Isto obriga o uso de sistema de controle automático de frequência, ou AFC (ver, por exemplo, o site <http://www.radartutorial.eu/09.receivers/rx11.en.html> , para uma discussão breve de sistemas AFC).

Laboratório 4.1

Objetivo:

Visualizar o espectro e a forma de onda de sinais modulados NBFM e NBPM, constatando teoricamente as características da modulação observada.

Material:

Cabos de conexão.

Terminações e cargas.

Equipamento:

Um osciloscópio até 100MHz.

Um analisador de espectro até 100MHz.

Um gerador de RF com capacidade de realizar modulação FM e PM.

Um voltímetro seletivo até 100MHz.

Um gerador de Forma de Ondas.

Um contador de frequências.

Montagem:

Conforme Figura 4-14⁵.

Procedimento:

1-Ajuste o gerador de RF para produzir um sinal modulado em FM por um sinal senoidal externo.

2-Escolha o desvio máximo de frequência a ser obtido em uma modulação NBFM (desvio de frequência muito baixo; p. Ex: 500Hz).

⁵ Nem todos os equipamentos são ligados ao mesmo tempo. Quando hoiuver necessidade de ligar mais do que um(1) equipamento em paralelo, lembrar de que somente um deverá ser ajustado para a impedância nominal de carregamento. Os demais serão colocados no modo de alta impedância. Neste caso, as terminações usadas devem ser apropriadas para formar o esquema da Figura 4-14.

Uma sugestão é utilizar o gerador de formas de onda como gerador senoidal de muito baixa frequência (1 ou 2Hz), excitando a entrada de sinal modulador externo do gerador de RF em alto valor de amplitude (p. Ex, 1Vp) de modo a simular uma modulação FM quasi-estática, e assim medir o desvio máximo de frequência da portadora com o contador de frequências, à medida em que se regula o gerador para um baixo desvio de frequência (no caso 500Hz).

É claro que em primeiro lugar deverão ser observadas as instruções de operação do gerador de RF.

3-Ajuste o gerador de RF para produzir um sinal de cerca de 8Mhz. A potência total deste sinal deve ser -10dBm. Confirme a frequência da portadora (sem modulação) com o contador de frequências e visualize a raia no analisador de espectro, calibrando-o adequadamente. Confirme a portadora gerada no osciloscópio e sua frequência e potência no voltímetro seletivo.

Preste atenção ao correto casamento de impedâncias entre os aparelhos. Nunca ligue duas impedâncias de mesmo valor em paralelo, pois isto irá mascarar o valor da carga e provocar medições erradas.

4-Realize a montagem da Figura 4-14, regulando o gerador de formas de onda para gerar um sinal senoidal de frequência 5KHz. Mantenha a mesma amplitude do sinal que no item 2.

5-Ajuste o gerador de RF para uma saída modulada em FM, mantendo os parâmetros ajustados previamente, para que seja gerado um sinal NBFM.

6-Usando o analisador de espectro, medir o espectro de frequências na saída do gerador de RF. Mostrar que esse espectro é compatível com o de um sinal NBFM.

Tentar determinar os valores de J_0 , J_1 e J_{-1} , e a partir desses valores determinar o valor de β . Verificar se o valor assim obtido é compatível com o valor fixado de Δf e $f_{\max}$.

7-Determinar, a partir do espectro observado, a LB do sinal modulado.

8-Observar o sinal no osciloscópio, no domínio do tempo.

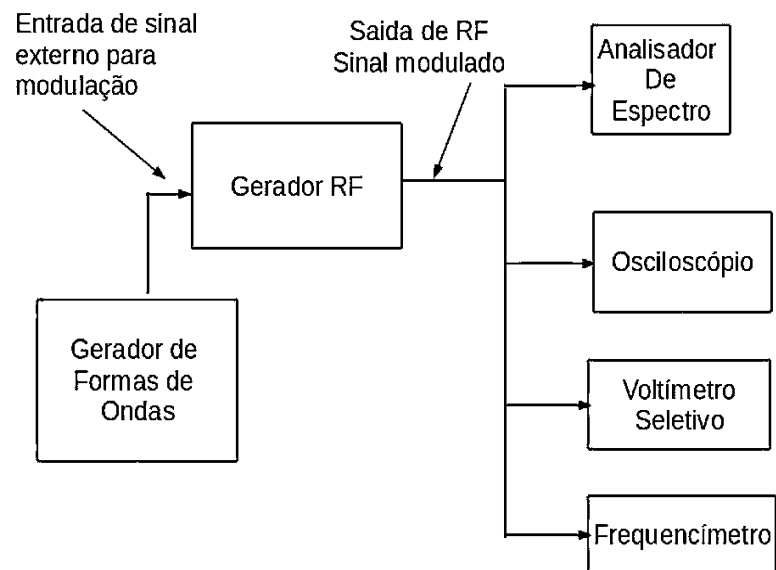


Figura 4-14

9-Repetir os itens acima para PM.

EXERCÍCIOS-Sequência D

D-4.1- Faça uma pesquisa e determine as principais características de um gerador de FM de Crosby. Esse tipo de gerador utiliza o método direto ou indireto para produzir o sinal FM? Justifique sua resposta, apresentando seus próprios argumentos. Apresente também suas fontes de consulta.

D-4.2-Utilize o modelo do gerador FM de Crosby e responda:

- a)Qual a frequência central do oscilador mestre, se o fator total de multiplicação é 20 e a f_p final é 88,8MHz?
- b)Qual o desvio de frequência inicial se o desvio final é 76KHz?
- c)Qual a taxa de desvio D na antena se $f_m=15$ KHz?
- d)Qual a taxa de desvio inicial?

D-4.3-Considere um gerador indireto de Armstrong com os seguintes parâmetros:

- a-Oscilador de cristal da portadora: 210KHz.
- b-Oscilador de cristal do conversor:10,2MHz.
- c-Voltagem da banda lateral do modulador balanceado: 0,018V.
- d-Voltagem da portadora na entrada do conversor: 5V
- e-1° multiplicador: x40
- f-2° multiplicador: x50
- g-frequência do sinal modulante: 2KHz

Responda

- A)Índice de modulação inicial e final.
- B)Desvio máximo inicial e final.
- C)Frequência final de transmissão.

D-4.4-Os geradores diretos de FM funcionam baseados na Equação 3-34, proporcionando um desvio de frequência instantâneo da portadora proporcional ao sinal modulante. Para um sinal modulante de variação contínua, como um sinal senoidal, é razoável supor que a frequência na saída do gerador seja também contínua. No entanto, medições realizadas em Laboratório apontam para um espectro de frequências discreto, onde são observadas a ocorrência de raios espectrais de amplitude e características de fase bem definidas, onde a energia ou potência entre raios é igual a zero. Essas raios estão espaçadas de um valor igual a f_m , frequência do sinal modulante. Como você explica este fato?

D-4.5- A modulação em fase é definida pela Equação 4.8. Com modulação tonal, temos o índice de modulação PM sendo igual a ak_p rad. Para evitar confusão nos resultados, mostrar que $k_p < n$. Desta forma, não existe WBPM do mesmo sentido que para FM, pois o índice de modulação não é maior do que n . Na verdade, é comum termos o NBPM, com $k_p \ll n$. Neste caso, demonstrar também que o espectro do sinal modulado pode ser aproximado por:

$$X_p(f) = \frac{A_p}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{jA_p D}{2} [X(f - f_p) - X(f + f_p)]$$

onde $X(f)$ é o espectro de sinal modulante (por exemplo, como na Figura 3-4) e D é a taxa de desvio de fase (que é muito menor que 1, caracterizando uma modulação em faixa estreita NBPM.) .Estamos supondo que $|x(t)|_{\max} = 1$.

D-4.6-Utilize o modulador de Armstrong e circuitos multiplicadores de lei quadrática para gerar um sinal WBFM.

Laboratório 4.2

Objetivo:

Visualizar o espectro e a forma de onda de sinais modulados WBFM, constatando teoricamente as características da modulação observada.

Material:

Cabos de conexão.

Terminações e cargas.

Equipamento:

Um osciloscópio até 100MHz.

Um analisador de espectro até 100MHz.

Um gerador de RF com capacidade de realizar modulação FM.

Um voltímetro seletivo até 100MHz.

Um gerador de Forma de Ondas.

Um contador de frequências.

Montagem:

Conforme Figura 4-14⁶.

Procedimento:

1-Ajuste o gerador de RF para produzir um sinal modulado em FM por um sinal senoidal externo.

2-Escolha o desvio máximo de frequência a ser obtido em uma modulação WBFM

3-Ajuste o gerador de RF para produzir um sinal de cerca de 8Mhz. A potência

⁶ Nem todos os equipamentos são ligados ao mesmo tempo. Quando hoiuver necessidade de ligar mais do que um(1) equipamento em paralelo, lembrar de que somente um deverá ser ajustado para a impedância nominal de carregamento. Os demais serão colocados no modo de alta impedância. Neste caso, as terminações usadas devem ser apropriadas para formar o esquema da Figura 4-14.

total deste sinal deve ser -10dBm. Confirme a frequência da portadora (sem modulação) com o contador de frequências e visualize a raia no analisador de espectro, calibrando-o adequadamente. Confirme a portadora gerada no osciloscópio e sua frequência e potência no voltímetro seletivo.

Preste atenção ao correto casamento de impedâncias entre os aparelhos. Nunca ligue duas impedâncias de mesmo valor em paralelo, pois isto irá mascarar o valor da carga e provocar medições erradas. Quando não puder ser evitado a ligação de dois aparelhos em paralelo, lembre-se de que um deles deve ser regulado para entrada em alta impedância, de modo a não sobrecarregar o circuito.

4-Realize a montagem da Figura 4-14, regulando o gerador de formas de onda para gerar um sinal senoidal de frequência 5KHz. Ajuste a amplitude do sinal para 1Vpico a pico.

5-Ajuste o gerador de RF para uma saída modulada em FM, mantendo os parâmetros ajustados previamente, para que seja gerado um sinal WBFM.

6-Usando o analisador de espectro, medir o espectro de frequências na saída do gerador de RF. Mostrar que esse espectro é compatível com o de um sinal WBFM. Tentar determinar os valores de J_0 , J_1 e J_{-1} , e a partir desses valores determinar o valor de β . Verificar se o valor assim obtido é compatível com o valor fixado de Δf e $f_{\max}$.

7-Determinar, a partir do espectro observado, a LB do sinal modulado.

8-Observar o sinal no osciloscópio, no domínio do tempo.

Potência Total e Rendimento de um Sinal Modulado em Ângulo

O modelo matemático básico representativo de um sinal modulado em ângulo é a Equação 4-1, da qual vemos que o sinal modulado em ângulo, na forma fasorial tem amplitude constante.

Quando $x(t)$ (o sinal modulante) é senoidal, ou composto por uma soma de senoides, a onda modulada em ângulo é periódica. Neste caso, a potência média deste sinal, quando calculada pela Equação 2-3, para um tempo suficientemente longo, fornece:

$$P_m = \frac{A^2}{2}$$

Quando o sinal modulante é aleatório, como acontece com um sinal de voz, não podemos afirmar que o sinal modulado resultante seja periódico. Entretanto, a amplitude do sinal modulado permanece constante, e normalmente o período da portadora é bem menor que a taxa de variação do sinal modulante, e assim muitos períodos da portadora ocorrerão nos quais a forma do sinal, podemos afirmar, será muito próxima de uma senóide.

Assim, as áreas positivas serão iguais as áreas negativas, e a potência média continuará sendo dada por $A^2/2$.

Concluimos, portanto, que a onda modulada tem amplitude constante, e a potência total transmitida é constante e igual a:

$$P_m = \frac{A^2}{2} \quad (4-36)$$

A Equação 4-36 é válida tanto para FM quanto para PM.

Potência na modulação tonal

Considerando as equações 4.17 (FM) e 4.23 (PM) vemos que, com base nos resultados anteriores

$$P_m = \frac{A^2}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta)$$

De acordo com o resultado da Equação 4-36 $P_m = A^2/2$, e

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (4-37)$$

Portanto, a potência total transportada por um sinal modulado em ângulo é constante.

A potência numa raia particular depende de sua amplitude, conseqüentemente depende de β .

A potência total é igual a soma das potências de todas as componentes, que varia em função de β . No entanto, elas se distribuem em amplitude no espectro de tal modo que o somatório de suas potências seja constante e igual a $A^2/2$.

Rendimento da modulação

O rendimento η é definido por:

$$\eta = \frac{\text{Pot útil}}{\text{Pot total}} = \frac{\text{Pot bandas laterais}}{\text{Pot port} + \text{Pot bandas laterais}}$$

A potência na frequência da portadora é dada por $A^2 J_0^2/2$. A potência das bandas laterais é igual a $A^2/2 - A^2 J_0^2/2$ (Pot total – Pot portadora) = $A^2/2(1 - J_0^2)$ = Pot útil. Portanto,

$$\eta = \frac{\text{Pot util}}{\text{Pot total}} = \frac{A^2/2}{A^2/2} (1 - J_0^2) = 1 - J_0^2 \quad (4-38)$$

Assim, vemos que o rendimento de uma modulação em ângulo depende do valor de J_0 , portanto do valor de β , podendo inclusive ser igual a 1, se $J_0=0$. Este resultado é válido tanto para FM quanto para PM.

Em se tratando de modulação tonal, o valor de β é bem definido. Neste caso, a Equação 4-38 pode ser perfeitamente calculada.

Porcentagem ou Profundidade de Modulação

O índice de modulação FM é definido como sendo a relação entre o desvio de frequência da portadora e a frequência do sinal modulante. Assim se o desvio da portadora é Δf , correspondendo a uma frequência modulante f_m , o índice de modulação FM é igual a $\beta = \Delta f / f_m$. De certa forma o valor de β indica a profundidade da modulação. Dependendo dos valores envolvidos, β pode assumir valores maiores do que 1.

Este é um comportamento diferente da modulação AM, onde o valor máximo do índice de modulação é igual a 1. É comum o índice de modulação AM ser expresso em porcentagem. Assim, se o índice AM é igual a 0.8, pode-se falar em 80% de modulação. Se o índice de modulação AM é igual a 1, tem-se 100% de modulação. Se por acaso o índice de modulação AM ultrapassar o valor máximo de 1, ou 100%, haverá distorção no sinal demodulado.

Na modulação FM não. O índice de modulação, principalmente em WBFM, tem valores maiores do que 1. Desta forma, não é comum a expressão de β em %.

O índice de modulação AM indica a profundidade da modulação. Se este é 10%, pode-se dizer que a profundidade da modulação é baixa. Se este é 100%, pode dizer que a profundidade da modulação é máxima. Assim, seria interessante ter-se também para FM um índice que pudesse expressar em % a profundidade da modulação sendo utilizada.

Considerando-se que o ajuste do modulador pode levar a diferentes desvios máximos de frequência, e consequentemente diversos valores de LB, pode-se usar este fato para definir a profundidade de modulação. Assim, a profundidade de modulação pode ser definida como a relação, expressa em %, entre o desvio máximo atual e o desvio máximo que leva à maior largura de banda LB possível, ou seja, a LB normalizada.

Por exemplo, se a LB normalizada é 170 kHz, correspondendo a um desvio máximo de 75 kHz, e o modulador opera com 80% de modulação, então seu ajuste é tal que o desvio máximo real é $80 \times 75 / 100 = 60$ kHz.

EXERCÍCIOS-Sequência E

E-4.1-Na Parte 3, foi apresentado o receptor super heterodino. Mostre que este esquema também pode se usado para uma modulação em ângulo, e faça uma pesquisa apresentando os valores de frequência de portadoras, banda de frequências, largura de banda do sinal modulado, FI e rejeição de frequência imagem utilizados para sistemas de radiodifusão FM comerciais ("broadcasting") empregados pelo Brasil. Apresente suas fontes de pesquisa.

E-4.2-Para alguns valores particulares de β , $J_0(\beta)=0$ (Veja Quadro 3). Neste caso $\eta=1$, (o rendimento η é definido em B-4.10) e toda a potência é transmitida como sinal útil. Calcule os dois primeiros valores de β para os quais isto ocorre. Apresente detalhes do cálculo.

R:

$$\beta=2,405 \text{ e } \beta=5,52$$

E-4.3-Numa modulação FM, o rendimento é de 100%, considerando modulação tonal com $f_m=1\text{kHz}$. Qual o desvio máximo Δf ?

E-4.4- Utilizando um analisador de espectro e um gerador de sinais senoidais calibrado em amplitude e frequência para gerar o sinal modulante, desenvolva um método para calibrar (determinar k_f) um gerador de WBFM.

E-4.5-Qual a LB de um sistema FM com 40% de modulação, se a LB normatizada é 180 kHz? Considere modulação tonal com $f_m=8\text{kHz}$.

R: 81,6kHz usando fórmula de aproximação.

E-4.6-Faça uma pesquisa e indique qual a LB estabelecida pela Anatel para FM broadcasting, a faixa de frequências para as portadoras, o número máximo de

estações, o valor do desvio máximo correspondente à LB normalizada e a potência de estações para o serviço de rádio comunitária. Qual a % de modulação estabelecida para as estações? Apresente suas fontes de pesquisa.

E-4.7-Um transmissor de FM tem uma potência de saída de 15W. Se o índice de modulação é igual a 3, determine as potências das raíais significativas do sinal. Qual a LB nominal? Em particular, qual a potência da portadora e o rendimento da modulação?

Discriminação de Frequências na Demodulação de Sinais FM

Um dos processos de demodulação de sinais FM pode ser feita em dois estágios: primeiro, transformação de variações de frequência em variações de amplitude de uma portadora de alta frequência; segundo, detecção das variações de amplitude da portadora.

Isto pode ser obtido através do circuito passa faixa sintonizado com uma função de transferência indicada na Figura 4-15.

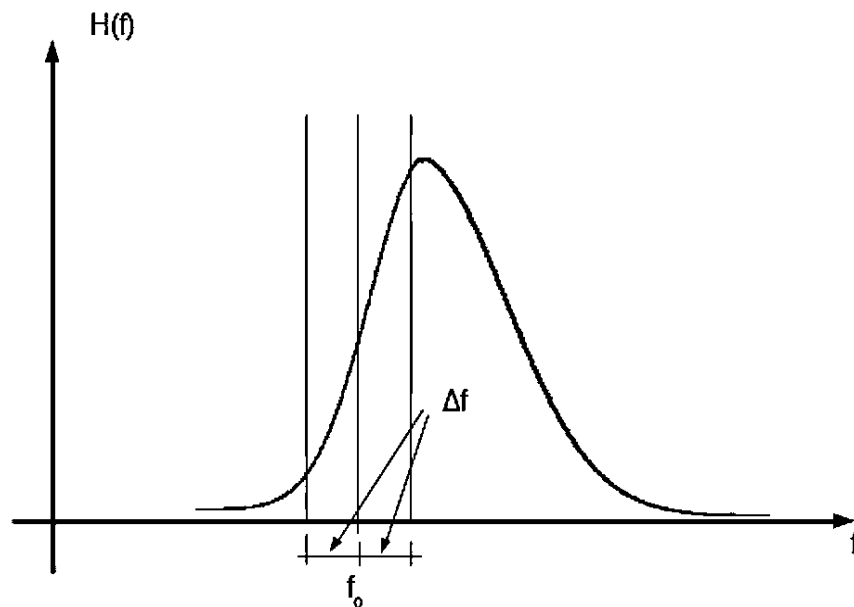


Figura 4-15

A função de transferência da Figura 4-15 pode ser obtida através de um filtro sintonizado LC de alto Q. A frequência de ressonância do filtro passa faixa LC é feita maior do que a frequência f_0 , sendo f_0 a frequência central da modulação.

A frequência de ressonância do filtro passa faixa LC deve ser bem ajustada, de modo que a frequência f_0 seja localizada bem no meio da faixa linear da curva de subida do filtro.

Além disso, a curva de subida deve ser dimensionada de modo a manter o desvio máximo Δf , em torno de f_0 , dentro da faixa a mais linear possível da curva de subida do filtro passa faixa LC.

Desta forma, um possível demodulador de FM seria dado pelo circuito da Figura 4-16.

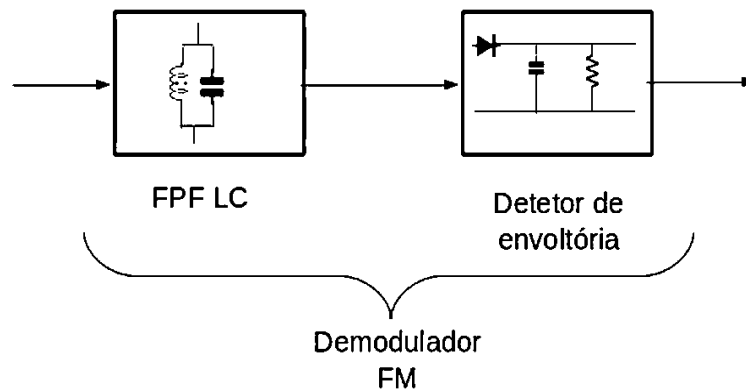


Figura 4-16

Note que, na saída do FPF LC, antes do detetor de envoltória, existe um misto de variação de frequência e amplitude, porém só a variação de amplitude é recuperada após o detetor de envoltória.

Assim, o sinal na saída do detetor de envoltória é proporcional ao sinal modulante, $x(t)$. Esta análise do circuito da Figura 4-16 é baseada na definição do sinal FM e na linearidade da característica de subida do filtro passa faixa LC.

Análise Matemática do Discriminador de Frequências

Um discriminador de frequências pode ser modelado como na Figura 4-9, do Exercício C-4.4. Isto pode ser verificado derivando-se a expressão de um sinal FM com modulação tonal:

$$\varphi_{FM} = A_p \left[\cos 2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t x_m(\tau) d\tau \right]$$

Após o diferenciador tem-se:

$$\frac{d\varphi_{FM}}{dt} = -2\pi A_p [f_p + k_f x_m(t)] \sin\left(2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t x_m(\tau) d\tau\right) \quad (4-39)$$

Se f_p é grande o suficiente para que a portadora não reverta em fase, nós podemos recuperar o sinal de mensagem $x_m(t)$ a partir da Equação (4-39) de uma forma similar àquela usada para sinais AM, com um detetor de envoltória.

A Equação 4-39 define a operação de discriminação no domínio do tempo. Considerando que

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f \quad \text{então} \quad \frac{dg(t)}{dt} = j2\pi f G(f)$$

A Figura 4-17 ilustra uma possível função de transferência, na banda do sinal modulado FM, de um sistema discriminador-em particular, para

$$f_p - LB/2 \leq |f| \leq f_p + LB/2$$

onde LB é a largura de banda do sinal modulado FM.

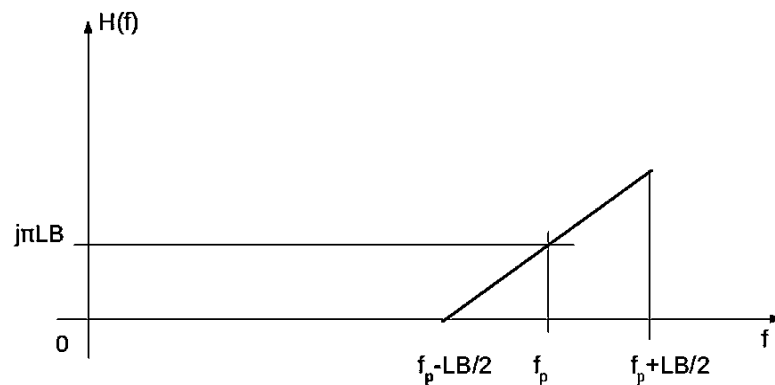


Figura 4-17

A função de transferência $H(f)$ de Figura 4-17 pode ser escrita como:

$$H(f) = \begin{cases} j2\pi[f - (f_p + LB/2)] & f_p - LB/2 \leq f \leq f_p + LB/2 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (4-40)$$

Considerando $s(t)$ o sinal modulado FM, e $s_\ell(t)$ o equivalente em baixa frequência do sinal modulado, podemos escrever:

$$\varphi_{FM}(t) = \mathcal{R}[\varphi_{FM_\ell}(t) e^{j2\pi f_p t}]$$

Daí, aplicando-se a definição de um sinal FM, tem-se o equivalente em baixa frequência do sinal FM

$$\varphi_{FM_\ell} = A_p e^{j[2\pi k_f \int_0^t x_m(t) dt]}$$

A representação em baixa frequência do filtro discriminador fornece:

$$H_\ell(f) = \begin{cases} j2\pi[f + LB/2] & -LB/2 \leq f \leq LB/2 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

Assim, na saída do filtro temos:

$$\begin{aligned} s_{o\ell}(t) &\leftrightarrow S_{o\ell}(f) = H_\ell(f) \times \varphi_{FM_\ell}(f) = \\ &= \begin{cases} j2\pi[f + LB/2] \varphi_{FM_\ell}(f) & LB/2 \leq f \leq LB/2 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \end{aligned}$$

Passando para o domínio do tempo,

$$s_{o\ell}(t) = \frac{d}{dt} \varphi_{FM_\ell}(t) + j\pi LB \varphi_{FM_\ell}(t)$$

Substituindo-se

$$\varphi_{FM_\ell}(t) = A e^{j[2\pi k_f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau]}$$

na expressão acima,

$$s_{0\ell}(t) = j\pi A(LB) \left[1 + \left(\frac{2k_f}{LB} \right) x(t) \right] e^{(j2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau)}$$

Na expressão acima, $x(t)$ é o sinal modulante, $x_m(t)$.

Então,

$$s_0(t) = \mathcal{R}[s_{0\ell}(t) e^{j2\pi f_p t}]$$

$$s_0(t) = \pi A_p(LB) \left[1 + \left(\frac{2k_f}{LB} \right) x_m(t) \right] \cos \left(2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t x_m(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2} \right)$$

A expressão acima representa a saída do filtro, em resposta ao sinal modulado FM. Vemos que a envoltória deste sinal, apesar de manter a variação em frequência, é proporcional ao sinal modulante, e desde que $2k_f |x_m(t)|_{\max} < LB$ o mesmo detetor de envoltória usado em AM pode ser usado para recuperar a informação no sinal $x_m(t)$.

O discriminador de Foster-Sealy

O demodulador da Figura 4-16, cuja função de transferência do filtro passa faixa está apresentada na Figura 4-15, apresenta um problema para sua implementação prática; é difícil a construção de um filtro com as características necessárias de linearidade na faixa de frequências correspondente à LB do sinal FM a ser demodulado. Em outras palavras, a característica de subida do filtro sintonizado LC, a qual teoricamente deveria ser como na Figura 4-17, linear em toda a excursão de frequências do sinal modulado FM, representada pela sua LB.

O discriminador de Foster-Sealy utiliza um circuito balanceado com dois filtros sintonizados respectivamente acima e abaixo de f_p . Assim, suas frequências de ressonância são deslocadas entre si. Além disso, eles são excitados em contrafase. O efeito final está apresentado na função de transferência equivalente apresentada na Figura 4-18.

Conforme se verifica, a característica de descida do filtro inferior compensa as não linearidades da característica de subida do filtro superior, proporcionando uma condição de conversão frequência – tensão praticamente linear, principalmente na

região de baixas e médias frequências. Além disso, a construção de 2 filtros para cobrir cada um a excursão de $LB/2$, na subida ou na descida, é mais fácil do que a construção de um único filtro para cobrir a excursão total de LB .

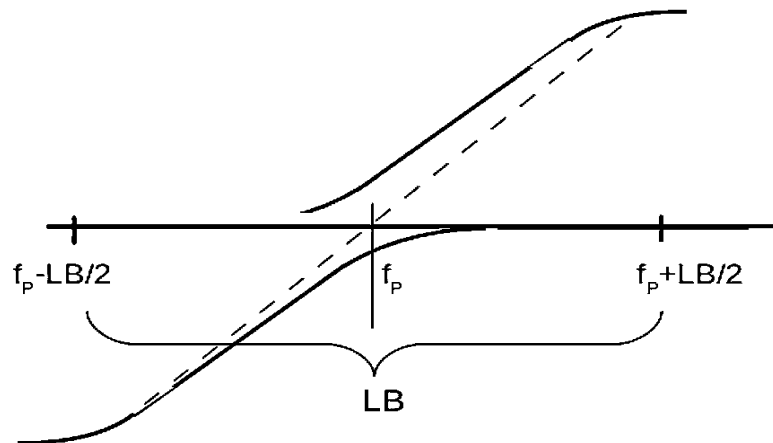


Figura 4-18

Após os dois filtros, detetores de envoltória recuperam a variação de amplitude do sinal modulante. A saída do circuito discriminador fornece a diferença entre as duas envoltórias. Desta forma, quando $f=f_p$, temos saída $x(t)=0$.

A Figura 4-19 apresenta um exemplo de circuito que pode ser usado.

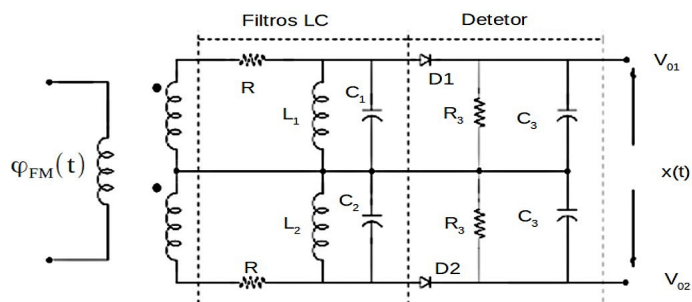


Figura 4-19

EXERCÍCIOS – Sequência F

F-4.1-Uma modulação FM tem a frequência de portadora ajustada para 100MHz, e o transmissor para 80% de modulação. O desvio máximo permitido é 75KHz. Sendo 5KHz a frequência máxima do sinal modulante, calcule a LB do sinal modulado. Apresente justificativas e seus critérios empregado para o cálculo da LB (por exemplo, a % da potência total englobada pela LB calculada).

F-4.2-Uma modulação FM tem a frequência de portadora ajustada para 100MHz, e o transmissor para 80% de modulação. O desvio máximo permitido é 75KHz, e 5KHz a LB do sinal modulante. Sendo a amplitude da portadora ajustada para 1V pap (pico a pico) na ausência de modulação, qual a potência do sinal modulado e rendimento estimado da modulação? Justifique sua resposta.

F-4.3-Considere a modulação FM efetuada conforme as especificações do Exercício F-4.2 acima. Considere o caso particular da modulação tonal, onde $f_m=5\text{KHz}$. A demodulação deste sinal é feita segundo os princípios expressos na Equação 4-39. Trace gráficos do sinal modulado e para o resultado da Equação 4-39.

F-4.4-Faça uma pesquisa e apresente uma análise razoável do discriminador de Foster-Sealy cujo circuito é apresentado na Figura 4-19. Apresente suas fontes de pesquisa.

F-4.5-Explique o que significa o conceito de equivalente em baixa frequência de um sinal ou um sistema passa banda, tal como apresentado no item “Análise Matemática do Discriminador de Frequências”, onde o equivalente em baixa frequência do filtro discriminador fornece:

$$H_t(f) = \begin{cases} j2\pi[f+LB/2] & -LB/2 \leq f \leq LB/2 \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

Apresente suas fontes de pesquisa, que devem ser coerentes com sua resposta.

Referências Bibliográficas e Fontes de Consulta

Os links abaixo oferecem excelentes fontes de consulta, inclusive para circuitos pll, que são bastante usados na geração e recepção de sinais FM.

1)<http://www.radio-electronics.com/info/rf-technology-design/fm-reception/fm-pll-detector-demodulator-demodulation.php>

2)http://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop

3)http://en.wikipedia.org/wiki/Voltage-controlled_oscillator

4)<http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/PLL>

Os livros e documentos a seguir são também boas fontes de consulta:

1)MU.04-QXD – Anexo C, Page 139 , Cap. 04, *Frequency Modulation*, doc .pdf, site <http://webtools.delmarlearning.com/> da Thomson obtido através do Google com a chave de pesquisa “PLL in frequency modulation Wikipedia”.

2)Ver bibliografia apresentada nos dois Volumes 3 _Parte1 e Parte2

Apêndice A

A listagem a seguir foi feita para rodar no software “Scilab”, que pode ser baixado da Internet inteiramente grátis, rodando em diversas plataformas, Windows, Linux, Solaris, Mac, etc.

Para download, acesse a página www.scilab.org ou através de um site de busca, como o Google, utilize a chave de pesquisa Scilab. São atualmente cerca de 143 MB para o Linux, de modo que é necessário uma conexão banda larga.

É interessante baixar também um tutorial ou manual, e ler pelo menos a parte introdutória. Para aqueles acostumados com outros softwares matemáticos, o Scilab é bastante semelhante ao conhecido Matlab, com a vantagem de ser inteiramente grátis.

O Scilab é um software aberto, o que significa que atende inteiramente às condições de distribuição e uso do softwares livres; ou seja, você pode reproduzi-lo à vontade, desde que atendidas as condições da licença GNU. Os comandos são muito parecidos com os do Matlab, inclusive a filosofia de utilização.

Há inclusive um Help muito bom, que deve ser bastante utilizado para a compreensão e uso dos comandos.

Outro recurso digno de nota é a possibilidade de manipulação dos gráficos gerados, os quais podem ser editados após a geração, e conjugados com os recursos inerentes a qualquer distribuição Linux, como os utilitários de captura de tela e manipulação de imagem, como o Gimp ou o ShowPhoto, podendo desta forma serem integrados com outros utilitários, como os da suíte de escritório brOffice.

Listagem:

```
i=sqrt(-1);  
pi=4*atan(1);  
k=-pi;  
ffq=[];  
beta=10;  
function [r]=IQ(v)
```

```

r=(1/(2*pi))*exp(i*(beta*sin(v)-NN*v));
endfunction
bb=[];
for NN=0:1:50
//Calculo da integral de Bessel
N=pi;
s=0;
fq=0;
n=0;
for x=k:0.001:N
n=n+1;
s=IQ(x);
fq=fq+2*s;
end
fq=fq-(IQ(k)+IQ(N));
fq=((N-k)/(2.*(n-1))).*fq;
ffq=[ffq fq];
bb=[bb NN];
end
[bb' ffq'];
//Plotagem de JN(beta)
xset('window',0)
plot2d (bb,ffq)
m=get("current_axes");
m.font_size=5;
xgrid

```

Apêndice B

A Figura B-1 apresenta o resultado de uma simulação em computador do espectro de módulo de um sinal modulado em FM, com as seguintes características:

modulação tonal, $A=1$ (amplitude da portadora), $\beta=1$, $f_{\max}=200\text{Hz}$, $f_p=10\text{KHz}$

A Figura B-1 apresenta a listagem completa do programa, e o resultado de aplicação para uma modulação tonal, conforme acima especificado.

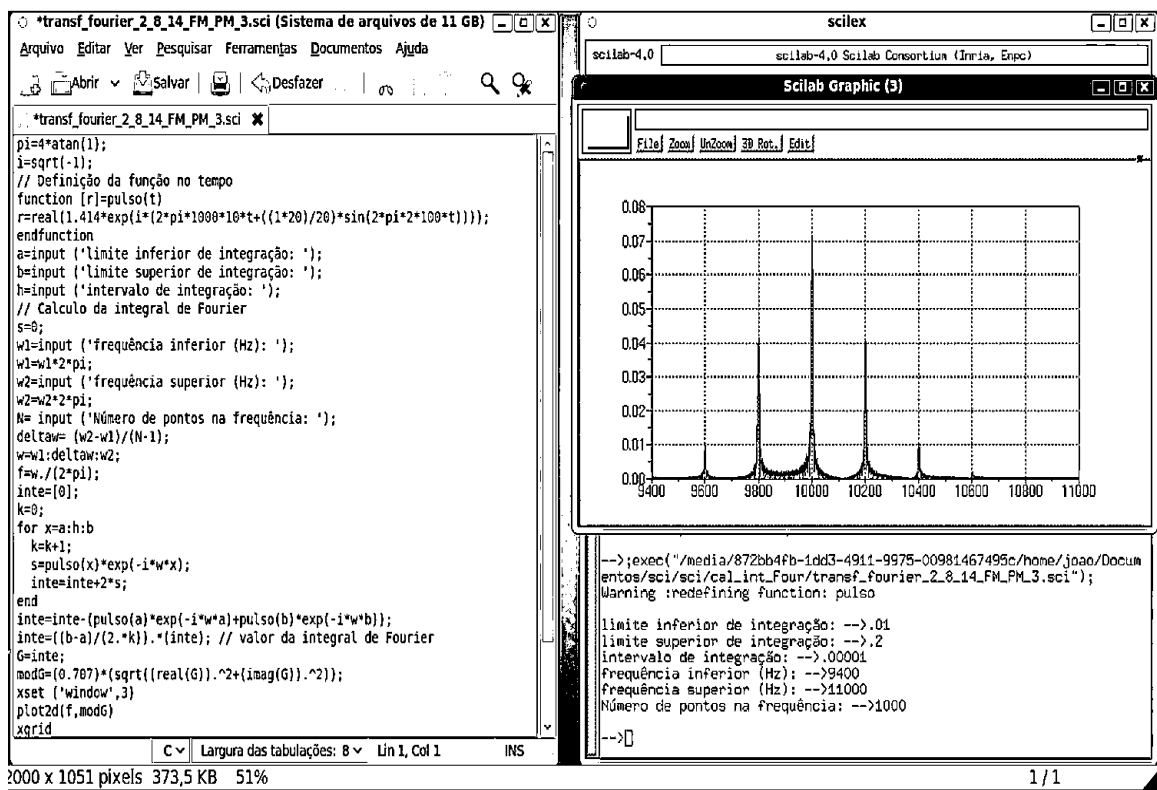


Figura B-1